



|              |                                                                             |
|--------------|-----------------------------------------------------------------------------|
| Title        | 概週期函数ノ Fourier 級数ノ operation 二関スル<br>Bochner-Jessen ノ定理                     |
| Author(s)    | 高橋, 進一                                                                      |
| Citation     | 全国紙上数学談話会. 1935, 58, p. 21-26                                               |
| Version Type | VoR                                                                         |
| URL          | <a href="https://doi.org/10.18910/74127">https://doi.org/10.18910/74127</a> |
| rights       |                                                                             |
| Note         |                                                                             |

*The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

# 205. 概週期函数 / Fourier 級數 / operation = 関スル Bochner- Jessen / 定理

高橋 進 - (阪大)

J. Favard 其, thèse, Sur les fonctions harmoniques presque-périodiques (Paris, 1927) 中デ次ノ有名ナ定理ヲ述ベテ居ラス。

$$\text{今} \quad f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{i\Lambda_n t} \quad (-\infty < t < \infty)$$

ヲ real variable  $t$  ノ概週期函数トスル。  $f(t)$  ノ積分ガ有界デ且ツ  $f(t)$  ハ order  $\alpha$  ( $0 < \alpha \leq 1$ ) ノ Lipschitz condition ヲ満足スルナラ

$$\sum_{n=1}^{\infty} i A_n \operatorname{sgn} \Lambda_n e^{i\Lambda_n t},$$

$$\operatorname{sgn} \Lambda_n = \begin{cases} +1 & \text{for } \Lambda_n > 0 \\ 0 & \text{for } \Lambda_n = 0 \\ -1 & \text{for } \Lambda_n < 0 \end{cases}$$

ハ  $f(t)$  ノ Conjugate function  $g(t)$  ノ Fourier 級數デアラス。

此ノ定理ノモトノ証明ハ調和概週期函数ノ理論ヲ使フ、  
デ可成リ面倒デスガ Favard ハ昨年 "Matematisk  
Tidsskrift, B" デ

## Sur la fonction conjuguée d'une fonction presque-périodique

、標題下 = 上掲ノ定理ノ簡單ナ証明ヲ公 = シマシタ。

其ノ証明法ハ概週期函数ノ親玉 Bohr ヲシテ私 = クレタ手紙中デ “the beautiful method” ト云ハシメタ程極メテ elegant ナモ、デス。私ハ此ノ Favard ノ方法ヲ使ツテ次ノ定理ヲ証明シマシタ。

(S. Takahashi, On a Property of the Fourier Series of an Almost Periodic Function, 帝國學士院紀事, 1935)

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{i\Lambda_n x} \quad (-\infty < x < \infty)$$

ヲ real variable  $x$  ノ概週期函数トシ且ツ  $f(x)$  ノ積分が有界ナラ

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sgn} \Lambda_n \cdot e^{-\sigma |\Lambda_n|} e^{i\Lambda_n x} \quad (\sigma \text{ ハ任意ノ正数})$$

モ亦概週期函数ノ Fourier 級数トナル。

此ノ定理ハ analytic almost periodic function ノ理論中デ重要ナ定理ノ一ツデアール Bohr ノ “Randwert-satz” ノ一拡張ト見做シ得ルモノデス。所ガ先程出タ “Matematisk Tidsskrift B” デ Copenhagen 大學数学教室ノ R. Petersen が

Om den formelle Differentiation of

# Fourierudviklingen for en næsten-periodisk Funktion

ノ標題下=私ノ定理ヲ擴張シタ次ノ様ナ美シイ定理ヲ証明シテ居マス。(原論文ハでんま一ノ語)

$$f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{i\Lambda_n t}$$

ヲ real variable  $t$ , 概週期函数トスルトキ

$$\sum_{\Lambda_n < 0} \Lambda_n A_n e^{\Lambda_n S}$$

並ビ=

$$S = \sigma + it$$

$$\sum_{\Lambda_n > 0} \Lambda_n A_n e^{\Lambda_n S}$$

ハ夫々 half-plane  $[0, +\infty)$  並ビ  $(-\infty, 0]$  = 於テ解析概週期函数ノ Dirichlet series トナル。

此定理ガ何故興味アルカト云ヘバ一般=

$$f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{i\Lambda_n t}$$

カテ formal = 微分シテ得タ series  $\sum_{n=1}^{\infty} i\Lambda_n A_n e^{i\Lambda_n t}$  ハ概週期函数ノ Fourier 級数トハナリマセン。ソヲナル場合ハ  $f(t)$  ノ derivative が存在シテ然モ其ガ又ハリ概週期函数トナル場合=限リマス。其時初メテ

$$f'(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} i\Lambda_n A_n e^{i\Lambda_n t}$$

依ッテ何等特別ノ假定ナクシテ得テレタ *Petersen*ノ  
定理ハ概週期函数ノ *Fourier* 級数ノ *formal differentiation* = 關スル面白い定理デアリ、此ノ定理ハ  
同時 = *Bohr*ノ解析概週期函数ノ *Laurent Separation*  
= 關スル定理ノ擴張トモナツテ居マス。

次ニ

$$f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{i\Lambda_n t} \quad (\Lambda_n \text{ハ凡テ} \neq 0 \text{トスル})$$

ヲ *formal* = 積ムシテ得タ *series*

$$C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{i\Lambda_n} e^{i\Lambda_n t} \quad (C \text{ハ常数})$$

モ亦一般ニ概週期函数ノ *Fourier* 級数トナリマセン。ソノ  
ナル場合ハ

$$F(t) = \int_0^t f(x) dx$$

ガ有界ナル場合、從ツテ  $F(t)$  ガヤハリ概週期函数トナル場  
合ニ限リマス。此処ニ於テ概週期函数ノ *Fourier* 級数ノ  
*formal integration* = 關スル定理ガアルベキ筈デス。  
其ニ對シテ私ハ次ノ定理ヲ得マシタ。

$$f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{i\Lambda_n t}$$

ヲ *real variable*  $t$ ノ概週期函数トスルトキ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\sigma + i\Lambda_n} e^{i\Lambda_n t} \quad (\sigma \text{ハ任意ノ正数})$$

ハ概週期函数, Fourier 級数デアル。(此ノ定理ノ証明ハ *On the Formal Integration of the Fourier Series of an Almost Periodic Function* トイフ題目デ 10 月ニ発行サレル *Matematisk Tidsskrift B* ニ出ル筈デス)

以上, Petersen ノ定理モ私ノ定理モ其ノ証明法ハ本質的ニ見テ Favard ノ方法ト異ナツテ居マセン。然モ此ノ Favard ノ方法ヲ利用シテ Copenhagen 大學數學教室ノ B. Jessen ハ次ノヤウナ概週期函数, Fourier 級数ノ operation ニ關スル一般ノ定理ヲ得マシタ。

(此事ニ關スル Jessen ノ論文ハ *Remarks on the theorems of R. Petersen and S. Takahashi* トイフ題目デヤハリ 10 月ニ発行サレル *Matematisk Tidsskrift B* ニ出ル筈デス)

今  $K(x)$  ヲ

$$\int_{-\infty}^{\infty} |K(x)| dx$$

ガ收斂スル様ニ *real variable* ノ函数トシ其 Fourier transform

$$H(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x) e^{-i\lambda x} dx$$

ヲ考ヘル。然ルトキ

$$f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{i\lambda_n t}$$

ヲ real variable  $t$  ノ 概週期函数トスレバ

$$\sum_{n=1}^{\infty} H(\Lambda_n) A_n e^{i\Lambda_n t}$$

ハ

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(-x+t) K(x) dx$$

ナル 概週期函数ノ Fourier 級数デアアル。

此ノ定理ハ Jessen モ 注意シテ居ルヤウ = Bochner  
ノ 論文

Über die Struktur von Fourierreihen  
fastperiodischer Funktionen

(Münchener Berichte, 1928)

中ニ 極ク implicitly = 姿ヲ 現ハシテ居マス。先掲ノ  
Petersen ノ 定理モ私ノ 定理モ  $K(x)$  ノ 特殊ノ 函数ニ 取レ  
バ 出テ 來マス。

此ノ Bochner-Jessen ノ 定理ハ 一般的ナモノナ  
ノデ 其レカラ 種々ノ 興味アル 定理ガ 誘導サレル 可能性ガ 充分  
アルヤウニ 思ヘマス。又 Bochner-Jessen ノ 定理自  
身ヲ 更ニ 擴張スルコトモ 試ミラレルベキ 價値ガ アルト 信ジマ  
ス。