206. Aussagenkalkül ニ於ケル"命題"ノ定義ニ就イテ.（I）

伊藤　誠（御影師範）

$\boxed{\text{I}}$ Warschau ノ Lukasiewicz 一派ノ流儀ニ従ッテ、$p_1, p_2, p_3,$ -------ヲ以ッテ Elementare Aussagenvariablen ヲ表ハシ、N, C ヲ夫々 Negation 及ビ Folgen ヲ意味スル ein-und zweistellig ナ Logische Operatoren トスル。今"n 次ノ命題" $A^{(n)}$ ニ對シテ次ノ如キ帰納的ナ定義ヲ與ヘル。

〔定義〕 1)　$A^{(0)} = p_i \quad (i = 1, 2, 3, \text{-------})$

2)　$A^{(n+1)} = NA^{(n)}$ 又ハ $CA^{(i)}A^{(j)} \quad (i + j = n)$

此ノ定義ニヨッテ、"命題"並ビニ其ノ"次數"ト云フ概念が同時ニ規定サレル。ソシテ直グ分ルヤウニ"一ツノ命題ノ次数ハ其ノ中ニ含マレテヰルN及ビCノ數ニ等シイ"事ニナル。

斯様ニ Aussagenkalkül ニ於ケル一ツノ命題ニ其ノ次数ヲ賦與シテ考ヘルコトハ色々ナ点デ便利ナヤウニ思ハレル。

今ソノ一例トシテ Wien ノ K. Menger が
"Eine elementare Bemerkung über die Struktur logischer Formeln" (Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums,

Heft 3, 1932）ノ中ニ於イテ述ベタ下記ノ定理ヲ証明シテ見ヨウ。

〔K. Menger ノ定理〕. N, C, p_1, p_2, ------ノ有限個カラナル順列Pガ一ツノ命題ヲ表ハスタメノ必要充分條件ハ次ノ三ツデアル.

（I） P内ノCノ数ハ p_1, p_2, ------ノ数ヨリ一ツ少ナイ。

（II） Pノ任意ノ "echter Anfangsschnitt" 内ノCノ数ハ p_1, p_2, ------ノ数ニ等シイカ, 又ハソレヨリ大デアル.

（III） Pノ最後ノ文字ハNデハナイ。

Menger ノ上記ノ論文デハ、タダ N, C, p_1, p_2, ------等ノ Buchstaben ノ数ニツイテ Induktion ヲ行ヘバヨイ、ト云フダケデ詳シイ証明ヲ與ヘテヰナイ。且ツ"命題"モハッキリ定義シテナイノデ，少シ定理ノ意味ガ明瞭ヲ缺ク恐レガアル。

以下述ベル証明ニ於テハ"命題"ハ先ニ掲ゲタ定義ニヨッテ規定サレタモノト解スル。

〔証明〕 (a) 必要條件デアルコトノ証明。

α) 0次ノ命題 A_0 ニ就テハ明ラカ。

β) n次マデノ命題 $A^{(i)}$ $(i=0, 1, 2, \cdots\cdots n)$ ニ就テ先ノ三ツノ條件ガ満足セラレタトスル。然ルトキハ任意ノ一ツノ $A^{(n+1)}$ ヲ取ッテ考ヘルト，ソノ定義ニヨッテ

(i) $A^{(n+1)}=NA^{(n)}$ カ又ハ

(ii) $A^{(n+1)}=CA^{(i)}A^{(j)}$ $(i+j=n)$

ノ何レカデアル。(i)ノ場合ニハ $A^{(n)}$ ニ就イテノ先ノ假定カラ $A^{(n+1)}$ モ亦(I),(II),(III)ノ條件ヲ滿足スル。

(ii)ノ場合ニハ $A^{(i)}$, $A^{(j)}$ 中ノCノ數ガ夫々 $p_1, p_2,$------ノ數ヨリ一ツ少ナイト云フコトカラ $CA^{(i)}A^{(j)}$ 中ノCノ數ハ矢張リ $p_1, p_2,$------ノ數ヨリ一ツダケ少ナイコトトナリ、條件(I)ガ滿足セラレル。IIトIIIノ成立ツコトモ同様ニ言ハレル。

コレデ必要條件デアルコトハ分ツタ。次ニ

〔証明〕(b) 充分條件デアルコトノ証明。

今N, C, $p_1, p_2,$------ノ m 個カラ成ル(重複ヲ許シテ)一ツノ順列 P_m ヲ考ヘル。

証明スルコトハ"P_m ガ(I),(II),(III)ノ條件ヲ滿足スレバ、夫レハ先ニ掲ゲタ定義ニヨル一ツノ命題トナル。"ト云フコトデアル。以下 m ニ就イテ Induktion ヲ行フ。

α) $m=1$ ノトキハ(I),(II),(III)ノ條件ヨリ $P_1=p_i$ $(i=1,2,$------ノ何レカ)デアルコトヲ要スル。ヨツテ P_1 ハ定義ニヨリ0次ノ命題トナル。

β) $i=1,2,$-------m マデノ P_i ニ就イテハ既ニ上ノコトガ成立ツモノト假定スル。扨テ P_{m+1} ハ次ノ何レカノ形ヲ取ル。

(i) $P_{m+1} = p_i P_m$

(ii) $P_{m+1} = N P_m$

(iii) $P_{m+1} = C P_m$

(i) ノ場合ニハ P_{m+1} ハ條件(II)ヲ滿足シナイカラ考ヘル必要ハナイ。

(ii) ノ場合ニハ P_{m+1} ガ條件(I),(II),(III)ヲ滿足スルコトカラ P_m ガ矢張リ之レ等ノ條件ヲ滿足シ、從ッテ假定ニヨリ或次數 n(m ヨリ小)ノ命題ヲ表ハス。即チ

$$P_m = A^{(n)} \qquad (n < m)$$

依ッテ $\quad P_{m+1} = NA^{(n)} = A^{(n+1)}$

トナリ P_{m+1} ハ ($n+1$) 次ノ命題トナル。

(iii) ノ場合ニハ P_m ノ最初カラ入番目ノ文字マデノ Anfangsschnitt $P_{m\lambda}$ 中ニ於ケル p_i ノ數トCノ數トノ差ヲ δ_λ デ表ハセバ、P_{m+1} ガ條件(I),(II),(III)ヲ滿足スル結果次ノ關係ヲ得ル。

$$\begin{cases} \delta_\lambda \leqq 1 & (\lambda = 1, 2, \text{------}, m-1) \\ \delta_m = 2 \end{cases}$$

コレヨリ直チニ $\delta_{m-1} = 1$ デアルコトガ知レル。

今 $\delta_1, \delta_2, \text{------}, \delta_{m-1}$ ノ中最初ニ1トナルモノヲ δ_k トスレバ

$$\begin{cases} \delta_\lambda \leqq 0, & \lambda = 1, 2, \text{------}\ k-1 \\ \delta_k = 1 \end{cases}$$

トナリ、P_{mk} ノ最後ノ文字ハ當然N又ハCトハナリ得ズ、

従ツテ P_{mk} ハ條件 (I), (II), (III) ヲ何レモ滿足シ、一ツノ命題ヲ表ハスコトトナル。即チ

$$P_{mk} = A^{(i)} \qquad (i < k)$$

P_m ヨリ P_{mk} ヲ取リ去ツタ殘リ P'_{mk} ヲ考ヘルト

$$P_{m+1} = CP_{mk}P'_{mk},$$

而シテ P_{m+1} 並ビニ P_{mk} ガ共ニ條件 (I), (II), (III) ヲ滿足スルコトヨリ 容易ニ P'_{mk} モ亦知ルコトガ分ル。

従ツテ $\qquad P'_{mk} = A^{(j)} \qquad (j < m-k),$

依ツテ $\qquad P_{m+1} = CA^{(i)}A^{(j)} = A^{(i+j+1)}$

トナリ、P_{m+1} ガ亦 $(i+j+1)$ 次ノ命題トナル。

以上ニヨツテ充分條件デアル証明ガ濟ンダ。

上ノ証明ヲ通ジテ眺メテミルト條件 (III) ハ (I), (II) ヨリ當然歸結サレルモノデアルカラ殊更擧ゲルニハ及バナイコトガ分ル。従ツテ *Menger* ノ條件ハ (I), (II) デ充分デアル。

$\boxed{2}$ 次ニ有限個ノ *Elementare Aussagenvariablen* $(p_1, p_2, \cdots\cdots, p_{a_0})$ ヨリ形成サレル n 次ノ命題ノ數ヲ求メテミル。

n 次ノ命題ノ集合ヲ $\mathfrak{A}^{(n)}$ デ表ハシ、ソノ數ヲ a_n トスル。然ルトキハ

$$\begin{cases} \mathfrak{A}^{(0)} = \{p_1, p_2, \cdots\cdots, p_{a_0}\} \\ \mathfrak{A}^{(n+1)} = N\mathfrak{A}^{(n)} + \sum\limits_{i+j=n} C\,\mathfrak{A}^{(i)}\mathfrak{A}^{(j)} \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

但シココニ $N\mathfrak{A}^{(n)}$ ハ $NA^{(n)}$ ナル形ノ命題ノ集合，$C\mathfrak{A}^{(i)}\mathfrak{A}^{(j)}$ ハ $CA^{(i)}A^{(j)}$ ナル形ノ命題ノ集合ヲ表ハスモノトスル。而シテ之等ノ集合中ノ命題ハ互ニソノ形ガ異ナツテキル。例ヘバ若シ

$$CA^{(i)}A^{(j)} = CA^{(i')}A^{(j')} \quad \left(\begin{array}{l} i+j=i'+j'=n, \\ i=i',\ j=j' \text{ ナルコトモ許ス} \end{array}\right)$$

トスレバ　$A^{(i)}A^{(j)} = A^{(i')}A^{(j')}$

従ッテ $\boxed{\text{I}}$ ニ述ベタ Menger ノ定理ニヨッテ

$$A^{(i)} = A^{(i')}$$

デナケレバナラナイ。何故ナラバ假リニ $A^{(i)}$ ガ $A^{(i')}$ ノ echte Anfangsschnitt デアルトスレバ條件(II)ニヨリ A_i 中ノ C ノ数ハ p_i ノ数ヨリ少ナクハナイ。然ルニ A_i ハ一ツノ命題デアルカラ條件(I)ニヨリ、ソノ中ノ C ノ数ハ p_i ノ数ヨリ一ツダケ少クナケレバナラナイ。之レハ矛盾スル。

依ッテ　$A^{(i)} = A^{(i')}$，$A^{(j)} = A^{(j')}$ トナル。

コノコトヲ考ニ入レルト上ノ $\mathfrak{A}_{n+1}$ ヲ表ハス式ヨリ直チニ

$$a_{n+1} = a_n + \sum_{i+j=n} a_i a_j \quad \text{------------ (2)}$$

ナル關係ヲ得ル，

今　$\sigma_n = \sum_{i+j=n} a_i a_j$

トオケバ　$a_{n+1}=a_n+\sigma_n$ ················ (2)'

コレヨリ　$a_{n+1}=a_0+\sum_{n=0}^{n}\sigma_n$ ················ (3)

コノ式ニヨッテ例ヘバ

$$a_0=2$$

ノ場合ニ就イテ実際計算シテミルト

$$a_1=6$$
$$a_2=30$$
$$a_3=186$$

等トナル。

$\boxed{3}$　$\boxed{1}$, $\boxed{2}$ ニ於イテハ C, N ナルニツノ Logische Operatoren カラ構成セラレル命題ニ就イテ述ベタガ、只一ツノ Operator C ノミヲ許ス場合（例ヘバ Hilbert ノ所謂 "Positive Logik" ニ於ケルガ如キ、又ハ Scheffer ノ "Unverträglich" Operator ヲ用ヒテ色々ノ Aussage ヲ構成スルヤウナ場合）モ全ク同様ニ論ゼラレル。此ノトキハ n 次ノ命題 A_n ノ定義ハ次ノ如クナル。

〔定義〕 1)　$A^{(0)}=p_i$　　$(i=1,2,3,\cdots\cdots)$

2)　$A^{(n+1)}=CA^{(i)}A^{(j)}$　$(i+j=n)$

又 Menger ノ定理ハ其ノ儘成立スルコトガ分ル。

$(n+1)$ 次ノ命題ノ数 a_{n+1} ハコノ場合次ノ如シナル。

$$a_{n+1}=\sum_{i+j=n}a_i\,a_j=\sigma_n$$

例ヘバ　$a_0=2$

トスルト　$a_1=4$

$a_2=16$

$a_3=80$

等トナル。實際 Scheffer ノ Operator ヲ基礎トシテ作リ得ル2次ノ命題ハ次ノ16個デアル。

$$\mathfrak{A}^{(2)}\left\{\begin{array}{lll}
(1) & p_1|p_1|p_1 & \sim \overline{p_1}\vee p_1 \\
(2) & p_1|p_1|p_2 & \sim (p_1\rightarrow p_2) \\
(3) & p_1|p_2|p_1 & \sim (p_1\rightarrow p_2) \\
(4) & p_1|p_2|p_2 & \sim (p_1\rightarrow p_2) \\
(5) & p_2|p_1|p_1 & \sim (p_2\rightarrow p_1) \\
(6) & p_2|p_1|p_2 & \sim (p_2\rightarrow p_1) \\
(7) & p_2|p_2|p_1 & \sim (p_2\rightarrow p_1) \\
(8) & p_2|p_2|p_2 & \sim \overline{p_2}\vee p_2 \\
(9) & p_1|p_1|p_1 & \sim p_1\vee\overline{p_1} \\
(10) & p_1|p_1|p_2 & \sim (p_2\rightarrow p_1) \\
(11) & p_1|p_2|p_1 & \sim (p_1\rightarrow p_2) \\
(12) & p_1|p_2|p_2 & \sim (p_2\rightarrow p_1) \\
(13) & p_2|p_1|p_1 & \sim (p_1\rightarrow p_2) \\
(14) & p_2|p_1|p_2 & \sim (p_2\rightarrow p_1) \\
(15) & p_2|p_2|p_1 & \sim (p_1\rightarrow p_2) \\
(16) & p_2|p_2|p_2 & \sim p_2\vee\overline{p_2}
\end{array}\right.$$

〜ノ右ニ並記シタ式ハ Zweiwertiger Aussagenkalkül ニ於ケル äquivalent ナ Aussage デアツテ、之等ニヨツテ見ルト

$(1)\sim(8)\sim(9)\sim(16),\quad (2)\sim(3)\sim(4)\sim(11)\sim(13)\sim(15),$

$(5)\sim(6)\sim(7)\sim(10)\sim(12)\sim(14)$

トナリ、只三ツノ Aussagefunktion ヲ與ヘルノミデアルコトガ知ラレル。

又 $\mathfrak{A}^{(0)}, \mathfrak{A}^{(1)}$ ハ夫々

$$\mathfrak{A}^{(0)}=\{p_1, p_2\},$$

$$\mathfrak{A}^{(1)}=\begin{Bmatrix} p_1|p_1\sim\overline{p}_1\vee p_1, & p_1|p_2\sim\overline{p}_1\vee\overline{p}_2, \\ p_2|p_1\sim\overline{p}_1\vee\overline{p}_2, & p_2|p_2\sim p_2\vee\overline{p}_2 \end{Bmatrix}$$

デアルカラ，結局 p_1, p_2 ノ二個ノ Elementare Aussagevariablen カラ構成サレル異ナツタ Aussagefunktion ノ数ハ Zweiwertiger A.K. ノ場合ニハ只次ノ6個ノミデアル。

$$p_1\vee\overline{p}_1,\quad p_1,\quad p_2,\quad \overline{p}_1\vee p_2,\quad p_1\vee\overline{p}_2,\quad \overline{p}_1\vee\overline{p}_2.$$

然ルニ実際ハ p_1, p_2 ヲ Argument トスル Aussagefunktion ハ $2^{2^2}=16$ 個存在スルカラ、上記以外ノ10個ノ A.-funktion ハ3個又ハソレ以上ノ Scheffer ノ Operator ヲ用ヒナケレバ定義シ得ナイコトガ分ル。

——(1935, 9, 12)——