



Title	函数方程式 $f(f(x))=F(x)$ 二就テ
Author(s)	宇野, 利雄
Citation	全国紙上数学談話会. 1935, 59, p. 12-15
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74132
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

210. 函數方程式 $f(f(x))=F(x)$ = 就テ

守野利雄 (商船)

南雲君が 57 号 1977 デ話サレタ上誌ノ函數方程式ハ僕
モ前ニ考ヘタコトガアルノデ未整理、未完成ノマコナガラ、
何カノ材料ニモトソレヲ報告シマス。

$f(f(x))=F(x)$ ノ解ヲ用ヒテ $y=f(x)$ ナル曲線ヲ
考ヘテ見ルト、コレハ次ノ如キ二変數 *Iteration* ノ不変
曲線トナル。

但シ不変曲線トハコノ *Iteration* ヲ施シタトキ、コ
ノ曲線上ノ点ガ再ビコノ曲線上ノ点トナルモノノコトヲイフ。
コノ点ハ特別ナ場合ニハソレ自身ニ一致スル (不変点) が、
一般ニハ違ツテオテヨイ。サテ今ノ場合ノ *Iteration*
ハ

$$(1) \begin{cases} x_{n+1} = y_n \\ y_{n+1} = F(x_n) \end{cases}$$

ノ如キモノデアル。何トナレバ $y_n = f(x_n)$ ナル如キ点 (x_n, y_n) ヲ考ヘテ見ルト、 $f(x)$ が上記函数方程式ノ解ナルコトヨリ、

$$f(y_n) = F(x_n)$$

従ツテ $f(x_{n+1}) = y_{n+1}$

トナリ、 $(x_n, y_n) = (1)$ ヲ施シタ (x_{n+1}, y_{n+1}) が矢張り同シ曲線 $y = f(x)$ ノ上ニナルコトトナル。

一例トシテ $f(f(x)) = x$ ヲトル、コノ場合ニ相當スル Iteration

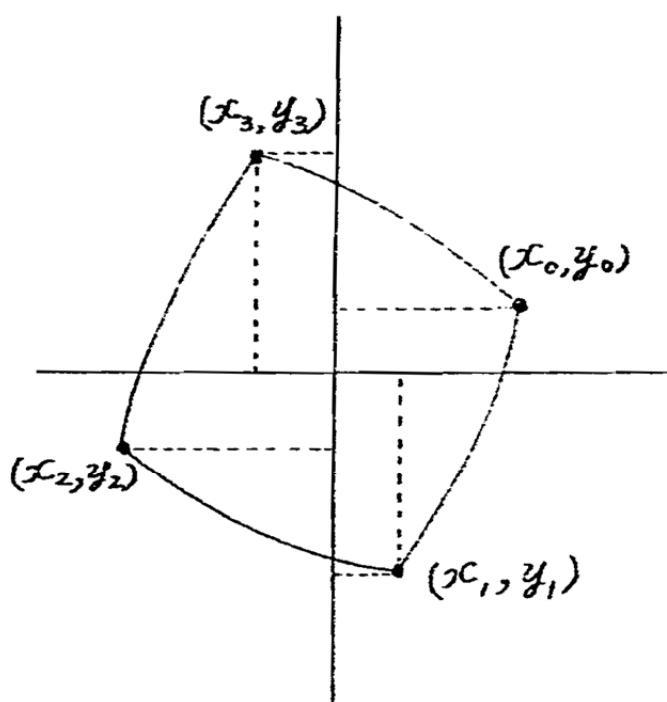
$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n \\ y_{n+1} = x_n \end{cases}$$

ニツイテハ $y = x$ ニツイテ對稱ナ曲線ハスベテ不変曲線ニナル、コノ中カラ $f(f(x)) = x$ ニ適合スルモノヲトルニ、増加函数デハ $y = x$ が唯一トナリ、他ハ單調減少デ $y = x$ ニツキ對稱ナラバスベテ $f(f(x)) = x$ ノ解トナルヲデアル、コノ他ノモノデハ $y = f(x)$ が多價トナリ $f(f(x))$ ノ意味が定メ難クナル。

次ニ $f(f(x)) = -x$ ヲ例トスル、コノ場合ノ Iteration

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n \\ y_{n+1} = -x_n \end{cases}$$

ハ原点ヲ中心トスル右 90° 廻轉デアリ、一点 (x_0, y_0) ノ
Iteration ハ図ノヤウニ原点ヲトリ囲ンデ排列シ



$y = f(x)$ が一順デア
レヤウナ不変曲線
が得ラレナクナル様
デアル。

但シコレハ *real*
デノ話デアルが、複
素変数ヲ使ヘバ

$$f(x) = ix \text{ ノ如キ}$$

$$\text{ハ明ニ } f(f(x)) = -x$$

ノ解ニナル。

コノ際ハ $y = ix$ ガ Iteration $x_{n+1} = y_n$,
 $y_{n+1} = -x_n$ ノ不変曲線ニナツテナル。

話ヲ *analytic* ト制限スルト、事ハ大分具体的ニナ
リサウダが、コノ際ハ Iteration (1) ノ不変点 (ξ, η)
即チ

$$\begin{cases} \xi = \eta \\ \eta = F(\xi) \end{cases}$$

ノ根ガ役目ヲツトメサウダ、コノ周囲デ $F(x)$ ヲ次ノ如ク展
開シ

$$F(x) = \xi + a(x - \xi) + \dots$$

トシテ (1) ヲ書ケト

$$(1) \begin{cases} x_{n+1} = y_n \\ y_{n+1} = \xi + a(x_n - \xi) + \dots \end{cases}$$

更 = $f(x)$ 7

$$f(x) = \xi + k(x - \xi) + \dots$$

ノ如ク書イテ, $y = f(x)$ が上記 (1) デ不変ナコトヲ 証セバ

$$\begin{cases} x_{n+1} = \xi + k(x_n - \xi) + \dots \\ \xi + k(x_{n+1} - \xi) + \dots = \xi + a(x_n - \xi) + \dots \end{cases}$$

之カラ x_{n+1} ヲ消去スレバ

$$k^2(x_n - \xi) = a(x_n - \xi) + \dots$$

故 = $k^2 = a$ トナル。

即チ $F'(\xi)$ カラ $f'(\xi)$ が $\pm \sqrt{F'(\xi)}$ トシテ得ラレル譯デアル。 $f(f(x)) = -x$ ノ例 = オケル $f(x) = ix$ ハ丁度コレ = 當ツテキル。(但シコノ証ハ $F'(\xi) \neq 0$)

以上大分 rough ナ話デアルが, 余暇アラバ追々コレヲ引キシメ, マトメテ行キタク思ツテマシマス。