



Title	Aussagenkalkül ニ於ケル”命題”ノ定義ニ就イテ (II)
Author(s)	伊藤, 誠
Citation	全国紙上数学談話会. 1935, 59, p. 15-23
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74133
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

211. *Aussagenkalkül* = 於ケル "命題"
ノ定義 = 就イテ (II)

伊 藤 誠 (御影師)

□ 前稿 (I) = 於イテ論理的 *Operator* が C 及 B N

ノニツデアル場合ニツイテ“命題”ヲ定義シタ。ソシテ此ノ
定義ニ從ツテ *Menger* ノ定理ヲ証明シ、猶又 n 次ノ命題
ノ数ヲ求めタ。コノ所論ヲ一般ノ場合ニ擴張シタヲ如何ナル
デアラウカ? 以下ソレニ就イテ考ヘテミタイ。

前ト同様ニ

$$\alpha_0 = \{p_1, p_2, \dots, p_a\}$$

ヲ *Elementare Aussagenvariablen* ノ集合
トスル。

今 *N* (*Negation*) ノ如キ *einstelling* + 論理的
Operator ヲ γ_1 個考ヘ、之レヲ $C_1^{(1)}, C_2^{(1)}, \dots, C_{\gamma_1}^{(1)}$
ヲ表ハシ、コノ集合ヲ $\Gamma^{(1)}$ トスル。即チ

$$\Gamma^{(1)} = \{C_1^{(1)}, C_2^{(1)}, \dots, C_{\gamma_1}^{(1)}\},$$

$$\text{同様ニ} \quad \Gamma^{(2)} = \{C_1^{(2)}, C_2^{(2)}, \dots, C_{\gamma_2}^{(2)}\},$$

$$\Gamma^{(n)} = \{C_1^{(n)}, C_2^{(n)}, \dots, C_{\gamma_n}^{(n)}\},$$

トスル。

コノ $C^{(\lambda)}$ ハ λ -*stelling* + *Operator* ヲ表ハ
シテキルガ、コレカラ之ヲ位数 λ ノ *Operator* ト呼デコ
トニスル。

扱テ“ n 次ノ命題” A_n ヲ前ニ做ツテ次ノ如ク歸納的ニ
定義スル:

$$1) A_0 = p_i \quad (i=1, 2, \dots, a_0)$$

$$2) A_{n+1} = C^{(1)} A_n$$

$$\text{od. } C^{(2)} A_{i_1} A_{i_2} \quad (i_1 + i_2 = n)$$

$$\text{od. } C^{(r)} A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_r} \quad (i_1 + i_2 + \dots + i_r = n)$$

然ルトキハ α_i ヲ以ツテ i 次ノ命題全部ヨリナル集合ヲ表ハセバ

$$\alpha_{n+1} = \Gamma^{(1)} \alpha_n + \sum_{i_1+i_2=n} \Gamma^{(2)} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} + \dots$$

$$+ \sum_{i_1+i_2+\dots+i_r=n} \Gamma^{(r)} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \dots \alpha_{i_r}$$

ナル関係が成リ立ツ。但シコト $= \Gamma^{(r)} \alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_r}$ ハ $C^{(r)} A_{i_1} \dots A_{i_r}$ トル形ノ命題全部ヲ表ハスモノトスル。

今、斯様ニシテ定義サレタル n 次ノ一ツノ命題 A_n 中ニ於ケル

$$\left\{ \begin{array}{ll} p \text{ノ数ヲ} & \pi_n \\ C^{(1)} & \text{〃} \quad C_n^{(1)} \\ C^{(2)} & \text{〃} \quad C_n^{(2)} \\ \dots & \dots \\ C^{(r)} & \text{〃} \quad C_n^{(r)} \end{array} \right.$$

トスレバ明ヲカニ

$$\sum_{\lambda=1}^r C_n^{(\lambda)} = n$$

ニシテ、且ツ

$$(I) \quad \pi_n = \sum_{\lambda=1}^r C_n^{(\lambda)} (\lambda - 1) + 1$$

ナル関係ノアルコトガ知ラレル。之ヲ下ニ証明シテミヤウ。

[証明] $n=$ 就イテ *Induktion* ヲ行フ。

$\alpha)$ $n=0$ ノトキハ $C_n^{(\lambda)} = 0$ ($\lambda=1, 2, \dots, r$)
ニシテ $\pi_0 = 1$ ナル故ニ確カニ上式ハ成リ立ツ。

$\beta)$ $i=1, 2, \dots$ ノマデノ $A_i =$ 就イテハ (I) ガ成リ立ツト假定スル。然ルトキハ定義ニヨツテ A_{n+1} ハ次ノ如キ形デアアル。

$$A_{n+1} = C^{(\nu)} A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_\nu} \\ (i_1 + i_2 + \dots + i_\nu = n)$$

從ツテ

$$\begin{aligned} \pi_{n+1} &= \pi_{i_1} + \pi_{i_2} + \dots + \pi_{i_\nu} \\ &= \left[\sum_{\lambda=1}^r C_{i_1}^{(\lambda)} (\lambda - 1) + 1 \right] + \left[\sum_{\lambda=1}^r C_{i_2}^{(\lambda)} (\lambda - 1) + 1 \right] + \dots \\ &\quad + \left[\sum_{\lambda=1}^r C_{i_\nu}^{(\lambda)} (\lambda - 1) + 1 \right] \\ &= \sum_{\lambda=1}^r \left(C_{i_1}^{(\lambda)} + C_{i_2}^{(\lambda)} + \dots + C_{i_\nu}^{(\lambda)} \right) (\lambda - 1) + \nu \end{aligned}$$

、Anfangsschnitt $A_n(\mu)$ 中、 μ 、数ヲ表ハシ、
 $C_n^{(\nu)}(\mu)$ ハ同様 = $A_n(\mu)$ 中、Ordnung $\lambda + \nu$
 Operator、数ヲ表ハス。又 m ハ A_n ヲ形成スル文字
 全部、数、即チ

$$m = \pi_n + n$$

デアアルトスル。

此ノ不等式(II)ノ証明ハ(I)ト同様 = n = 就₁テノ
 Induktion = 依ル。

[証明]

α) $n=1$ ノトキハ

$$A^{(\nu)} = C^{(\nu)} p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_\nu} \quad (1 \leq i_1, i_2, \dots, i_\nu \leq a_0)$$

ナル形デアアルカラ

$$\pi_1(\mu) = \mu - 1$$

$$\text{又} \quad \sum_{\lambda=1}^r C_1^{(\nu)}(\mu)(\lambda-1) = c_1^{(\nu)}(\mu-1) = 1 \times (\mu-1) = \mu-1,$$

$$\text{然ル} = \mu \leq \nu,$$

$$\text{故} = \pi_1(\mu) \leq \sum_{\lambda=1}^r C_1^{(\nu)}(\mu)(\lambda-1)$$

トナリ、上ノ不等式ハ確カニ成立スル。

β) $n=1, 2, 3, \dots, n$ マデノ値ニ對シテハ、不等
 式(II)ガ成立シタト假定スル。然ルトキハ A_{n+1} ハ

$$A_{n+1} = C^{(\nu)} A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_p} \cdots A_{i_\nu}$$

ナル形デアアルカラ、 μ 個ノ文字ヨリ成ルソノ *echte*

Anfangsschnitt Q_{μ} ヲ考ヘルト, 夫レハ次ノニツノ
場合ニ分レル。

$$(i) \quad Q(\mu) = C^{(\nu)} A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_p} \quad (p < \nu)$$

$$(ii) \quad Q(\mu) = C^{(\nu)} A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_{p-1}} A'_{i_p} (\mu') \quad (p \leq \nu)$$

但シ、 $A'_{i_p}(\mu')$ ハ A_{i_p} への 1 次元部分空間 π の基底 π 表ハシ、 μ' 個ノ文字カラナルモノトスル。

(i) の場合: $\pi_{n+1}(\mu)$ は $Q(\mu)$ 中ノ p ノ数 = シテ。
ソレハ $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_p}$ 中ノ p ノ数ノ和 = 等シイ。即
テ

$$\pi_{n+1}(\mu) = \pi_{i_1} + \pi_{i_2} + \dots + \pi_{i_p}$$

コレハ先=証明シタ式(I)=ヨリ

$$\begin{aligned}
&= \left[\sum_{\lambda=1}^r C_{i_1}^{(\omega)} \cdot (\lambda-1) + 1 \right] + \left[\sum_{\lambda=1}^r C_{i_2}^{(\omega)} \cdot (\lambda-1) + 1 \right] + \dots \\
&\quad \dots + \left[\sum_{\lambda=1}^r C_{i_p}^{(\omega)} \cdot (\lambda-1) + 1 \right] \\
&= \sum_{\lambda=1}^r \left(C_{i_1}^{(\omega)} + C_{i_2}^{(\omega)} + \dots + C_{i_p}^{(\omega)} \right) \cdot (\lambda-1) + p
\end{aligned}$$

然 $\sqrt{2}$ =

$$\begin{cases} C_{i_1}^{(\lambda)} + C_{i_2}^{(\lambda)} + \dots + C_{i_p}^{(\lambda)} = C_{n+1}^{(\lambda)}(\mu) & (\lambda \neq \nu) \\ \text{"} \quad \quad \quad \text{"} = C_{n+1}^{(\nu)}(\mu) - 1 & (\lambda = \nu) \end{cases}$$

ナル故、上式ハ次ノ如クナル。

$$\begin{aligned}\pi_{n+1}(\mu) &= \sum_{\lambda=1, \lambda \neq \nu}^r C_{n+1}^{(\lambda)}(\mu) \cdot (\lambda-1) + C_{n+1}^{(\nu)}(\mu) \cdot (\nu-1) + p \\ &= \sum_{\lambda=1}^r C_{n+1}^{(\lambda)}(\mu) \cdot (\lambda-1) - (\nu-p-1),\end{aligned}$$

而シテ $p < \nu$ デアルカラ,

$$\nu - p - 1 \geq 0$$

$$\text{故} = \pi_{n+1}(\mu) \leq \sum_{\lambda=1}^r C_{n+1}^{(\lambda)}(\mu) \cdot (\lambda-1)$$

即チ $n = n+1$ = 對シテ (II) が成立スルコトナル。

(ii) ノ 場 合: コノ場 合 = $\wedge$

$$\begin{aligned}\pi_{n+1}(\mu) &= \pi_{i_1} + \pi_{i_2} + \cdots + \pi_{i_{p-1}} \\ &\quad + (A'_{i_p}(\mu') \text{ 中, } p, \text{ 数})\end{aligned}$$

トナル。而シテ $\pi_{i_1}, \cdots, \pi_{i_{p-1}}$ ハ前式 (I) = ヨツテ與ヘ
ラレ, 又 $i_p \leq n$ ナル故, 假定 = ヨリ

$$(A'_{i_p}(\mu') \text{ 中, } p, \text{ 数}) \leq \sum_{\lambda=1}^r C_{i_p}^{(\lambda)}(\mu') \cdot (\lambda-1)$$

從ツテ

$$\begin{aligned}\pi_{n+1}(\mu) &\leq \left[\sum_{\lambda=1}^r C_{i_1}^{(\lambda)} \cdot (\lambda-1) + 1 \right] + \left[\sum_{\lambda=1}^r C_{i_2}^{(\lambda)} \cdot (\lambda-1) + 1 \right] + \cdots \\ &\quad + \left[\sum_{\lambda=1}^r C_{i_{p-1}}^{(\lambda)} \cdot (\lambda-1) + 1 \right] + \sum_{\lambda=1}^r C_{i_p}^{(\lambda)}(\mu') \cdot (\lambda-1) \\ &= \sum \left(C_{i_1}^{(\lambda)} + C_{i_2}^{(\lambda)} + \cdots + C_{i_{p-1}}^{(\lambda)} + C_{i_p}^{(\lambda)}(\mu') \right) \cdot (\lambda-1) + (p-1)\end{aligned}$$

