OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	Aussagenkalkül ニ於ケル"命題"ノ定義ニ就イテ（Ⅱ）
Author(s)	伊藤, 誠
Citation	全国紙上数学談話会. 1935, 59, p. 15-23
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74133
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

211. Aussagenkalkül ニ於ケル"命題"ノ定義ニ就イテ(II)

伊藤　誠(御影師)

[1] 前稿(I)ニ於イテ論理的 Operator ガC及ビN

ノ二ツデァル場合ニツイテ〝命題〟ヲ定義シタ。ソシテ此ノ定義ニ從ッテ Menger ノ定理ヲ証明シ、猶又 n 次ノ命題ノ数ヲ求メタ。コノ所論ヲ一般ノ場合ニ擴張シタラ如何ナルデアラウカ？ 以下ソレニ就イテ考ヘテミタイ。

前ト同様ニ

$$\mathfrak{A}_0=\{p_1, p_2, \cdots\cdots, p_{a_0}\}$$

ヲ Elementare Aussagenvariablen ノ集合トスル。

今 N (Negation) ノ如キ einstelling ＋論理的 Operator ヲ γ_1 個考ヘ，之レヲ $C_1^{(1)}, C_2^{(1)}, \cdots\cdots, C_{\gamma_1}^{(1)}$ デ表ハシ、コノ集合ヲ $\Gamma^{(1)}$ トスル。即チ

$$\Gamma^{(1)}=\{C_1^{(1)}, C_2^{(1)}, \cdots\cdots, C_{\gamma_1}^{(1)}\},$$

同様ニ $\Gamma^{(2)}=\{C_1^{(2)}, C_2^{(2)}, \cdots\cdots, C_{\gamma_2}^{(2)}\},$

$$\Gamma^{(n)}=\{C_1^{(n)}, C_2^{(n)}, \cdots\cdots, C_{\gamma_n}^{(n)}\},$$

トスル。

コゝニ $C^{(\lambda)}$ ハ λ-stelling ＋ Operator ヲ表ハシテヰルガ，コレカラ之ヲ位數 λ ノ Operator ト呼ブコトニスル。

扨テ〝n 次ノ命題〟A_n ヲ前ニ做ッテ次ノ如ク歸納的ニ定義スル：

1) $A_0 = p_i \quad (i = 1, 2, \cdots\cdots, a_0)$

2) $A_{n+1} = C^{(1)} A_n$

$$\text{od. } C^{(2)} A_{i_1} A_{i_2} \quad (i_1 + i_2 = n)$$

$$\text{od. } C^{(r)} A_{i_1} A_{i_2} \cdots\cdots A_{i_r} \quad (i_1 + i_2 + \cdots\cdots + i_r = n)$$

然ルトキハ α_i ヲ以ッテ i 次ノ命題全部ヨリナル集合ヲ表ハセバ

$$\alpha_{n+1} = \Gamma^{(1)} \alpha_n + \sum_{i_1+i_2=n} \Gamma^{(2)} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} + \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \sum_{i_1+i_2+\cdots\cdots+i_r=n} \Gamma^{(r)} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \cdots\cdots\cdots \alpha_{i_r}$$

ナル関係が成リ立ツ。但シコゝニ $\Gamma^{(\nu)} \alpha_{i_1} \cdots\cdots\cdots \alpha_{i_\nu}$ ハ $C^{(\nu)} A_{i_1} \cdots\cdots\cdots A_{i_\nu}$ トル形ノ命題全部ヲ表ハスモノトスル。

今、斯様ニシテ定義サレタル次ノ一ツノ命題 A_n 中ニ於ケル

p ノ数ヲ	π_n
$C^{(1)}$ 〃	$c_n^{(1)}$
$C^{(2)}$ 〃	$c_n^{(2)}$

$C^{(r)}$ 〃	$c_n^{(r)}$

トスレバ明ラカニ

$$\sum_{\lambda=1}^{r} C_n^{(\lambda)} = n$$

ニシテ、且ツ

(I) $$\boxed{\pi_n = \sum_{\lambda=1}^{r} C_n^{(\lambda)}(\lambda-1)+1}$$

ナル関係ノアルコトガ知ラレル。之レヲ下ニ証明シテミヤウ。

〔証明〕 nニ就イテ Induktion ヲ行フ。

α) $n=0$ ノトキハ $C_n^{(\lambda)}=0$ $(\lambda=1,2,\cdots\cdots,r)$ ニシテ $\pi_0=1$ トル故確カニ上式ハ成リ立ツ。

β) $i=1,2,\cdots\cdots,n$ マデノ A_i ニ就イテハ (I)が成リ立ツト假定スル。然ルトキハ定義ニヨツテ A_{n+1} ハ次ノ如キ形デアル。

$$A_{n+1} = C^{(\nu)} A_{i_1} A_{i_2}, \cdots\cdots\cdots, A_{i_\nu}$$
$$(i_1 + i_2 + \cdots\cdots + i_\nu = n)$$

從ツテ

$$\pi_{n+1} = \pi_{i_1} + \pi_{i_2} + \cdots\cdots + \pi_{i_\nu}$$
$$= \left[\sum_{\lambda=1}^{r} C_{i_1}^{(\lambda)}(\lambda-1)+1\right] + \left[\sum_{\lambda=1}^{r} C_{i_2}^{(\lambda)}(\lambda-1)+1\right] + \cdots\cdots$$
$$+ \left[\sum_{\lambda=1}^{r} C_{i_\nu}^{(\lambda)}(\lambda-1)+1\right]$$
$$= \sum_{\lambda=1}^{r}\left(C_{i_1}^{(\lambda)} + C_{i_2}^{(\lambda)} + \cdots\cdots + C_{i_\nu}^{(\lambda)}\right)(\lambda-1) + \nu$$

然ルニ今ノ場合

$$\begin{cases} C_{i_1}^{(\lambda)}+C_{i_2}^{(\lambda)}+\cdots\cdots+C_{i_\nu}^{(\lambda)}=C_{n+1}^{(\lambda)} & (\lambda\neq\nu) \\ \quad\text{〃}\qquad\qquad\text{〃}\qquad\quad =C_{n+1}^{(\nu)}-1 & (\lambda=\nu) \end{cases}$$

ナル故，上式ハ

$$=\sum_{\lambda=1,\lambda\neq\mu}^{r} C_{n+1}^{(\lambda)}(\lambda-1)+(C_{n+1}^{(\nu)}-1)(\nu-1)+\nu$$

$$=\sum_{\lambda=1}^{r} C_{n+1}^{(\lambda)}(\lambda-1)+1$$

トナル。　即チ $i=n+1$ ノトキニモ (I) ガ成リ立ツコトトナル。 $\alpha)$, $\beta)$ ニヨツテ (I) ガ一般ニ成立スルコトガ分ツタ。

此ノ (I) 式ハ前稿ニ述ベタ Menger ノ條件 (I) ニ相等スルモノデアツテ、實際此ノ式ニ於イテ $r=2$ トオケバ

$$\pi_n=\sum_{\lambda=1}^{2} C_n^{(\lambda)}(\lambda-1)+1=C_n^{(2)}+1$$

トナツテ Menger ノ條件 (I) ガ得ラレル。

更ニ Menger ノ條件 (II) ニ相等スルモノハ何デアラウカ？之ハ次ノ不等式デ與ヘラレル：

(II) $$\boxed{\pi_n(\mu)\leqq\sum_{\lambda=1}^{r} C_n^{(\lambda)}(\mu)(\lambda-1),\ (\mu=1,2,\cdots\cdots,m-1)}$$

但シ、コヽニ $\pi_n(\mu)$ ハ A_n ニ於イテ μ 番目ノ文字マデ

ノ Anfangsschnitt $A_n(\mu)$ 中ノ ν ノ数ヲ表ハシ，$C_n^{(\nu)}(\mu)$ ハ同様ニ $A_n(\mu)$ 中ノ Ordnung λ ナル Operator ノ数ヲ表ハス。又 m ハ A_n ヲ形成スル文字全部ノ数，即チ

$$m = \pi_n + n$$

デアルトスル。

此ノ不等式(II)ノ証明ハ(I)ト同様ニ n ニ就イテノ Induktion ニ依ル。

〔証明〕

$\alpha)$ $n=1$ ノトキハ

$$A^{(1)} = C^{(\nu)} p_{i_1} p_{i_2} \cdots\cdots p_{i_\nu} \quad (1 \leqq i_1, i_2, \cdots, i_\nu \leqq a_0)$$

ナル形デアルカラ

$$\pi_1(\mu) = \mu - 1$$

又
$$\sum_{\lambda=1}^{r} C_1^{(\lambda)}(\mu)(\lambda-1) = C_1^{(\nu)}(\mu-1) = 1 \times (\mu-1) = \mu-1,$$

然ルニ $\mu \leqq \nu$,

故ニ
$$\pi_1(\mu) \leqq \sum_{\lambda=1}^{r} C_1^{(\lambda)}(\mu)(\lambda-1)$$

トナリ，上ノ不等式ハ確カニ成立スル。

$\beta)$ $n=1, 2, 3, \cdots\cdots, n$ マデノ値ニ對シテハ，不等式(II)ガ成立シタト假定スル。然ルトキハ A_{n+1} ハ

$$A_{n+1} = C^{(\nu)} A_{i_1} A_{i_2} \cdots\cdots A_{i_\rho} \cdots\cdots A_{i_\nu}$$

ナル形デアルカラ，μ 個ノ文字ヨリ成ルソノ echte

Anfangsschnitt Q_μ ヲ考ヘルト，夫レハ次ノ二ツノ場合ニ分レル。

(i) $Q(\mu) = C^{(\nu)} A_{i_1} A_{i_2} \cdots\cdots A_{i_\rho} \qquad (\rho < \nu)$

(ii) $Q(\mu) = C^{(\nu)} A_{i_1} A_{i_2} \cdots\cdots A_{i_{\rho-1}} A'_{i_\rho}(\mu') \quad (\rho \leqq \nu)$

但シ、$A'_{i_\rho}(\mu')$ ハ A_{i_ρ} ノ eichte Anfangsschnitt ヲ表ハシ，μ' 個ノ文字カラナルモノトスル。

(i) ノ場合：　$\pi_{n+1}(\mu)$ ハ $Q(\mu)$ 中ノ n ノ数ニシテ、ソレハ $A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots\cdots, A_{i_\rho}$ 中ノ n ノ数ノ和ニ等シイ。即チ

$$\pi_{n+1}(\mu) = \pi_{i_1} + \pi_{i_2} + \cdots\cdots + \pi_{i_\rho}$$

コレハ先ニ証明シタ式 (I) ニヨリ

$$= \left[\sum_{\lambda=1}^{r} C_{i_1}^{(\lambda)} \cdot (\lambda-1)+1\right] + \left[\sum_{\lambda=1}^{r} C_{i_2}^{(\lambda)} \cdot (\lambda-1)+1\right] + \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots + \left[\sum_{\lambda=1}^{r} C_{i_\rho}^{(\lambda)} \cdot (\lambda-1)+1\right]$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{r} \left(C_{i_1}^{(\lambda)} + C_{i_2}^{(\lambda)} + \cdots\cdots + C_{i_\rho}^{(\lambda)}\right) \cdot (\lambda-1) + \rho$$

然ルニ

$$\begin{cases} C_{i_1}^{(\lambda)} + C_{i_2}^{(\lambda)} + \cdots\cdots + C_{i_\rho}^{(\lambda)} = C_{n+1}^{(\lambda)}(\mu) & (\lambda \neq \nu) \\ \quad 〃 \qquad\qquad 〃 \quad = C_{n+1}^{(\nu)}(\mu) - 1 & (\lambda = \nu) \end{cases}$$

ナル故、上式ハ次ノ如クナル。

$$\pi_{n+1}(\mu)=\sum_{\lambda=1,\,\lambda\neq\nu}^{r} C_{n+1}^{(\lambda)}(\mu)\cdot(\lambda-1)+C_{n+1}^{(\nu)}(\mu)\cdot(\nu-1)+\rho$$

$$=\sum_{\lambda=1}^{r} C_{n+1}^{(\lambda)}(\mu)\cdot(\lambda-1)-(\nu-\rho-1),$$

而シテ　$\rho<\nu$　デアルカラ，

$$\nu-\rho-1\geqq 0$$

故ニ　$$\pi_{n+1}(\mu)\leqq\sum_{\lambda=1}^{r} C_{n+1}^{(\lambda)}(\mu)\cdot(\lambda-1)$$

即チ　$n=n+1$　ニ對シテ（II）ガ成立スルコトトナル。

(ii) ノ場合：　コノ場合ニハ

$$\pi_{n+1}(\mu)=\pi_{i_1}+\pi_{i_2}+\cdots\cdots+\pi_{i_{\rho-1}}$$
$$+(A'_{i_\rho}(\mu')\text{ 中ノ }\rho\text{ ノ数})$$

トナル。而シテ $\pi_{i_1},\cdots\cdots,\pi_{i_{\rho-1}}$ ハ前式（I）ニヨッテ共ヘラレ，又 $i_\rho\leqq r$ ナル故，假定ニヨリ

$$(A'_{i_\rho}(\mu')\text{ 中ノ }\rho\text{ ノ數})\leqq\sum_{\lambda=1}^{r} C_{i_\rho}^{(\lambda)}(\mu')\cdot(\lambda-1)$$

從ッテ

$$\pi_{n+1}(\mu)\leqq\left[\sum_{\lambda=1}^{r} C_{i_1}^{(\lambda)}\cdot(\lambda-1)+1\right]+\left[\sum C_{i_2}^{(\lambda)}\cdot(\lambda-1)+1\right]+\cdots\cdots$$

$$+\left[\sum_{\lambda=1}^{r} C_{i_{\rho-1}}^{(\lambda)}\cdot(\lambda-1)+1\right]+\sum_{\lambda=1}^{r} C_{i_\rho}^{(\lambda)*}(\mu')\cdot(\lambda-1)$$

$$=\sum\left(C_{i_1}^{(\lambda)}+C_{i_2}^{(\lambda)}+\cdots\cdots+C_{i_{\rho-1}}^{(\lambda)}+C_{i_\rho}^{(\lambda)}(\mu')\right)\cdot(\lambda-1)+(\rho-1)$$

然ルニ

$$\begin{cases} C_{i_1}^{(\lambda)} + C_{i_2}^{(\lambda)} + \cdots\cdots + C_{i_{\rho-1}}^{(\lambda)} + C_{i_\rho}^{(\lambda)}(\mu') = C_{n+1}^{(\lambda)}(\mu) & (\lambda \neq \nu) \\ \quad 〃 \qquad\qquad 〃 \qquad\qquad = C_{n+1}^{(\nu)}(\mu) - 1 & (\lambda = \nu) \end{cases}$$

ナル故，上式ハ次ノ如クナル：

$$= \sum_{\lambda=1,\ \lambda\neq\nu}^{r} C_{n+1}^{(\lambda)}(\mu)\cdot(\lambda-1) + \left(C_{n+1}^{(\nu)}(\mu)-1\right)\cdot(\nu-1) + (\rho-1)$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{r} C_{n+1}^{(\lambda)}(\mu)\cdot(\lambda-1) - (\nu-\rho)$$

而シテ $\nu \geqq \rho$ デアルカラ、結局

$$\pi_{n+1}(\mu) \leqq \sum_{\lambda=1}^{r} C_{n+1}^{(\lambda)}(\mu)\cdot(\lambda-1)$$

$$(\mu = 1, 2, \cdots\cdots\cdots, m-1)$$

ヲ得ル。 $\alpha)$ 及ビ $\beta)$ デ帰納法ニヨル(II)式ノ証明ハ完結シタ。

扨テ上述ニヨリ (I) 及ビ(II)式ハ $p_i\ (i = 1, 2, \cdots\cdots, a_0)$ 並ビニ $C_l^{(\lambda)}\ (\lambda = 1, 2, \cdots\cdots, r;\ l = 1, 2, \cdots\cdots, \gamma_\lambda)$ 等ノ文字カラ成ルーツノ順序集合が Aussage ヲ表ハス為メ必要條件デアルコトガワカッタ。

——（ツヅク）——