



Title	函数方程式 $f(f(x))=F(x)$ 二就テ III
Author(s)	南雲, 道夫
Citation	全国紙上数学談話会. 1935, 59, p. 31-36
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74135
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

213. 函数方程式 $f(f(x)) = F(x) = \text{就テ III}$

南 栗 道 夫 (阪大)

紙上談話會ノ 57 号デハ $f(x)$ が 純増加連続函数ノ場合
ノミヲ 考察シタ。次ニ $f(x)$ が 純減少連続函数ノ場合ニ 函数
方程式 ($f(x)$ ヲ 未知函数, $F(x)$ ヲ 既知函数トシテ)

$$(I) \quad f(f(x)) = F(x)$$

ヲ 考察シヨウ。何時デモ 純單調連続函数バカリヲ 問題ニスル
ノハ, ソレが可逆的一意連続寫像ヲ 與ヘルカラニ 他ナラス,

$F(x)$ は閉區間 $[a, b]$ で純増加でなければならぬハ
言フマデモナイ。

I. $f(x)$ が $[a, b]$ で定義サレタモノトシ、ソノ反復
 $f(f(x))$ が $[a, b]$ で意味ヲ有スルタメニハ、 $[a, b]$ で
$$a \leq f(x) \leq b$$

でなければならぬ。故ニ $[a, b]$ = 於テ少クトモ一ツ $f(x)$
ノ不動点、即チ

$$f(x) = x$$

ナル点が存在スル。以上ハ $f(x)$ が連続ナコトダカラ成立
スル。特ニ $f(x)$ が純減小ノ時ニハ、不動点ハ $[a, b]$ = 只
一ツ存在シ、ソレハ $[a, b]$ ノ内部ニアル。ソノ不動点ヲ C
トスル。

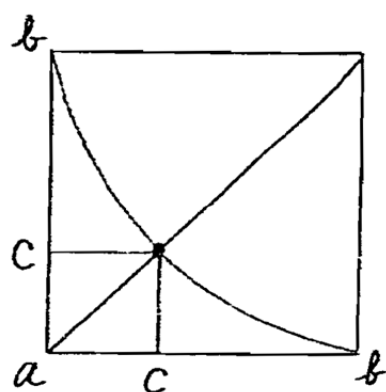
シカラバ

$$a \leq x \leq c \text{ ノ時 } \quad c \leq f(x) \leq b$$

$$c \leq x \leq b \text{ ノ時 } \quad a \leq f(x) \leq c$$

$[c$ ハ勿論 $F(x)$ ノ不動点デアアル] 以下 $f(a) = b$,
 $f(b) = a$. 即チ $f(x)$ ハ $[a, b]$ ヲソレ自身ヘ可逆的ニ
寫ス寫像ヲ與ヘルモノト假定スル。此ノ假定ハ強イ假定デア
ルガ、此ノ假定ノ成立セヌトキニハ、以下ノ議論ハ不動点 C
ノ近傍ニ於イテ成立スルモノデアアル。($f(x)$ が純増加ノ場合
モ同様)

カクテ $f(x) = y$ リ、區間 $[a, c]$ ト $[c, b]$ トハ互ニ
交換サレル。



今 $J(x)$ ヲバ、ソノぐらふが
 $y=x$ = 對シテ對稱デ純減小デ

$J(a)=b, J(b)=a, J(c)=c$
 +ル連続函数, 即チ $[a, c]$ = 於
 テ $J(x)=J^{-1}(x) \quad J(c)=c$

ナル函数トスル。 $\{J(x) \wedge [a, c] \vee [c, b] \vee \text{トヲ交換スル}\}$
 ソコデ $fJ(x)=f_1(x), Jf(x)=f_2(x)$

$$JFJ(x)=F_1(x)$$

トオケコト=ヨリ, 変數ノ區域ヲ全部 $[a, c]$ カテ $[c, b]$
 =変換スレバ, 元ノ方程式ハ $[a, c]$ = 於テ (I) が成立スル
 カハリ=,

$$[c, b] = \text{於テ } f_2 f_1(x) = F_1(x) \text{ が成立.}$$

又 $[c, b] = \text{於テ (I) が成立スルカハリ=,}$

$$[c, b] = \text{於テ } f_1 f_2(x) = F(x) \text{ が成立スル.}$$

カクテ (I) ノ代リ = $[c, b] = \text{於ケル聯立方程式}$

$$\begin{cases} f_2 f_1(x) = F_1(x) \\ f_1 f_2(x) = F_2(x) \end{cases} \quad [F_2(x) = F(x)]$$

ヲ解クコト=ナル。 $\{[a, c] = \text{於テハ } f(x)=f_1 J(x),$
 $[c, b] = \text{於テハ } f(x)=J f_2(x) \text{ トオケバ, } [a, b] = \text{於ケ}$
 $\text{ル } f(x) \text{ ヲ得ル}\}$

II. カクテ我々ハ F_1, F_2, f_1, f_2 ヲ純増加函数トシテ

$$\begin{cases} f_2 f_1 = F_1 \\ f_1 f_2 = F_2 \end{cases}$$

ヲ解クコト = ナツタ。之カラ

$$f_2 = F_1 f_1^{-1} \text{ 及ビ } f_2 = f_1^{-1} F_2$$

ヲ得ル。從ツテ

$$F_1 f_1^{-1} = f_1^{-1} F_2$$

或ハ

$$f_1 F_1 f_1^{-1} = F_2.$$

之レハ區間 $C \leq x \leq b$, 及ビ $C \leq y \leq b$ ヲバ夫々

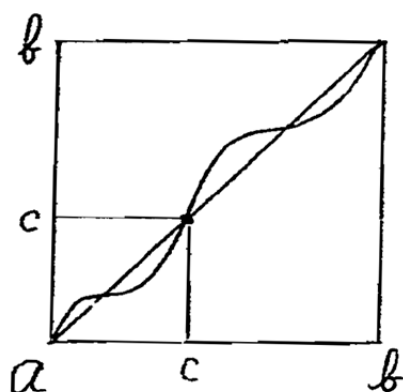
$$x' = f_1(x)$$

$$y' = f_1(y)$$

= ヨツテ 同ジ區間 $C \leq x' \leq b$, 及ビ $C \leq y' \leq b$ = 寫像シ
タトキ $y = F_1(x)$ が $y' = F_2(x') =$ 移ルコトヲ示ス。

從ツテ $F_1(x)$ 及ビ $F_2(x)$ ハ、ソノ両方ノ不動点ノ集合
が位相幾何學的 = 同型ナルコト及ビソノ相對應スル不動点ノ
間ノ區間 = 於テ $F_1(x)$ 及ビ $F_2(x)$ が同時 = x ヨリ大又
ハ同時 = x ヨリ小ナルコトヲ必要トスル。 ($f_1(x)$ が純増
加ナル = ヨル)

從ツテ元ノ函数 $F(x)$ = ツイテハ



$$y = x, \quad y = F(x)$$

ナレ圖形ガ、 $x = c, y = c$ ナル
点ヲバ位相幾何學的 = 對稱ノ中心
トシテ有スルコトが必要デアル。

逆 = 以上ノ性質ガアル時 = ハ

$$f_1 F_1 f_1^{-1} = F_2$$

ハ常ニ解カレル。ソレニハ相對應スル不動点ノ間ノ區間 (α_1, β_1) 及ビ (α_2, β_2) ニ於テ、夫々

$$\varphi_1(t+1) = F_1(\varphi_1(t)) \quad \varphi_1 \in (\alpha_1, \beta_1)$$

$$\varphi_2(t+1) = F_2(\varphi_2(t)) \quad \varphi_2 \in (\alpha_2, \beta_2)$$

ヲ解ケバ $\varphi_2 \varphi_1^{-1}(x) = f_1(x)$ が解デアル。(不動点デハ $x' = f_1(x) = \text{ヨリ } F_1(x)$ ノ不動点ガ之ニ對應スル $F_2(x)$ ノ不動点ニ對應スレバヨイ。)

特ニ $F(x)$ ノ不動点ガ有限個ノトキニハ、 C ノ兩側ニ於ケル不動点ノ數ガ一致シ、ソノ C ノ兩側ニ於テ同シ順序ニ相違スル不動点ノ間ノ區間デハ $F(x) - x$ ノ符号ガ相反スルコトガ問題ノ方程式ガ解ケルタメニ必要且ツ充分デアル(但シ純減小函数ヲ解トスル時)

III. 一般ニ

$$f^{\ell}(x) = \underbrace{f f \cdots f}_{\ell}(x) = F(x)$$

デ $f(x)$ ガ純減小ナル解ヲ求ムルコトハ ℓ ガ偶數ノ場合ニハ容易デアル。何トナレバ $\ell = 2\ell'$ トシ $f^2(x) = g(x)$ トオケバ $g(x)$ ハ純増加デアル。故ニ以前ニ論ツタ方法ニヨツ

$$\text{テ} \quad g^{\ell'}(x) = F(x)$$

ガ解カレル。 $g(x)$ ノ不動点及ビ $g(x) - x$ ノ符号ハ $F(x)$ ノ不動点及ビ $F(x) - x$ ノ符号ト一致スル。カケテ我々ノ問題ハ

$$ff(x) = g(x)$$

ヲ解クコトニ改メラレタ。之ハ本論ニ於テ解決シタモノデア
ル。但カ奇數ノ場合ハ未ダ解決ヲ得テナイ。諸君ノ御援助ヲ
仰グ次第デアル。

尚ホ最初ノ方法デハ純減小函數ナル解が得ラヌコトハ
 $\varphi(t)$ が純單調ナラバ $\varphi(\varphi(x)^{-1} + \theta)$ ハ必ず純増加ナルニ
ヨル。

又 $F(x)$ が純單調ナラバ, $f(x)$ ニ必ず純單調デナケレバ
ナラヌコトモ容易ニ分ル。