OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	Aussagenkalkül ニ於ケル命題ノ定義ニ就テ（III）
Author(s)	伊藤, 誠
Citation	全国紙上数学談話会. 1935, 60, p. 6-15
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74137
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

215. Aussagenkalkül ニ於ケル命題ノ定義ニ就テ(III)

伊藤　誠（御影師範）

次ニ此ノ二ツノ條件ガ又充分條件デアルコトヲ証明シタイ。題意ヲ再ビ繰返セバ，

"今p及ビ$C^{(\lambda)}$，m個カラナル順序集合P_mヲ考ヘル。P_m中ノpノ数ヲ$\pi(P_m)$，$C^{(\lambda)}$ノ数ヲ$c^{(\lambda)}(P_m)$トシ，P_mノ任意，echte Anfangsschnitt $P_m(\mu)$中ノpノ数ヲ$\pi(P_m(\mu))$トスル。コノトキ若シモ次ノ二條件

(I)　$$\pi(P_m)=\sum_{\lambda=1}^{r} c^{(\lambda)}(P_m)\cdot(\lambda-1)+1$$

(II)　$$\pi(P_m)\leqq\sum_{\lambda=1}^{r} c^{(\lambda)}(P_m(\mu))\cdot(\lambda-1)\quad(\mu=1,2,\cdots\cdots,m-1)$$

ガ満足サレルナラバ，P_mハ一ツノ Aussage デアル。"

[証明]　m＝就イテ Induktion ヲ行フ。

α)　$m=1$ノトキ，此ノ時條件(I)ガ成立スルタメニハ，明ラカニ

$$C^{(\lambda)}(P_1)=0\quad(\lambda=1,2,\cdots\cdots,r),\quad \pi(P_1)=1$$

デナケレバナラナイ。従ッテ

$$P_1=p$$

トナリ．P_1ハ0次ノ命題トナル。

β)　$m=1,2,\cdots\cdots,m$マデ上記ノコトガ成立シタト假定シヨウ。　今P_{m+1}ヲ考ヘルト，ソレハ次ノ何レカノ形ヲ

取ル。

(α) $P_{m+1} = pP_m$

(β) $P_{m+1} = C^{(\nu)}P_m$

然ル=(α)ノ場合ハ條件(II)ニヨッテ起リ得ナイ。何故ナラバ(II)ニヨリ

$$\pi(P_{m+1}(\mu)) \leqq \sum_{\lambda=1}^{r} c^{(\lambda)}(P_{m+1}(\mu))\cdot(\lambda-1) \qquad (\mu=1,2,\cdots\cdots,m)$$

コノ式ニ於イテ特ニ $\mu=1$ トスレバ

$$\pi(P_{m+1}(1)) \leqq \sum_{\lambda=1}^{r} c^{(\lambda)}(P_{m+1}(1))\cdot(\lambda-1)$$

今ノ場合 $\pi(P_{m+1}(1))=1$, $c^{(\lambda)}(P_{m+1}(2))=1$,

ソレ故上式ハ $1 \leqq 0$ トナリ成立シナイコトトナルカラ。

依ッテ(β)ノ場合ダケヲ考ヘレバヨイ。

此ノ場合ニハ P_m ガν個ノ Aussagen ニ分解サレル。

以下先ヅ之ヲ証明シヤウ。

P_{m+1} ノ形カラ明ラカニ

$$\left.\begin{aligned} &\pi(P_{m+1})=\pi(P_m),\ \pi(P_{m+1}(\mu+1))=\pi(P_m(\mu)),\\ &c^{(\lambda)}(P_{m+1}(\mu+1))=c^{(\lambda)}(P_m(\mu)) \qquad (\lambda\neq\nu),\\ &c^{(\nu)}(P_{m+1}(\mu+1))=c^{(\nu)}(P_m(\mu))+1 \end{aligned}\right\} (\mu=1,2,\cdots,m)$$

但シ $P_m(m)=P_m$ トスル。之等ヲ

條件(I):

$$\pi(P_{m+1}) = \sum_{\lambda=1}^{r} c^{(\lambda)}(P_{m+1})\cdot(\lambda-1)+1$$

ニ代入シテ

$$\pi(P_m)=\sum_{\lambda=1,\lambda\neq\nu}^{r} c^{(\lambda)}(P_m)\cdot(\lambda-1)+\left(c^{(\nu)}(P_m)+1\right)\cdot(\nu-1)+1$$

$$=\sum_{\lambda=1}^{r} c^{(\lambda)}(P_m)\cdot(\lambda-1)+\nu \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

又條件 II:

$$\pi(P_{m+1}(\mu+1))\leqq\sum_{\lambda=1}^{r} c^{(\lambda)}(P_{m+1}(\mu+1))\cdot(\lambda-1) \quad (\mu=1,2,\cdots,m-1)$$

ニ代入シテ

$$\pi(P_m(\mu))\leqq\sum_{\lambda=1,\lambda\neq\nu}^{r} c^{(\lambda)}(P_m(\mu))\cdot(\lambda-1)+\left(c^{(\nu)}(P_m(\mu))+1\right)\cdot(\nu-1)$$

$$=\sum_{\lambda=1}^{r} c^{(\lambda)}(P_m(\mu))\cdot(\lambda-1)+(\nu-1) \quad \cdots\cdots\cdots (2)$$

$$(\mu=1,2,\cdots\cdots,m-1)$$

今 (i) $\underline{\nu=1}$ ノトキハ (1), 及ビ (2) 式ハ夫々

$$\begin{cases}\pi(P_m)=\sum_{\lambda=1}^{r} c^{(\lambda)}(P_m)\cdot(\lambda-1)+1 \\ \pi(P_m(\mu))\leqq\sum_{\lambda=1}^{r} c^{(\lambda)}(P_m(\mu))\cdot(\lambda-1) \quad (\mu=1,2,\cdots,m-1)\end{cases}$$

トナリ、從ッテ假定ニヨリ P_m ハーツノ Aussage A_n トナル。

(ii) $\nu=1,2,\cdots\cdots,\nu-1$ マデノ場合ニツイテハ, P_m ガ (1),(2) ノ條件ヲ滿足スレバ夫々 $1,2,\cdots\cdots,\nu-1$ 個ノ Aussagen ニ分解出來ルモノト假定スル。然ルトキハ $\nu=\nu$ ノ

場合ニモ然ルコトガ言ヘル。之ガタメニ新シク

$$\delta_m(\mu)=\pi(P_m(\mu))-\sum_{\lambda=1}^{r}c^{(\lambda)}(P_m(\mu))\cdot(\lambda-1) \quad \cdots\cdots\cdots (3)$$

ナル μ ノ函數ヲ考ヘルト，假定(1),(2)ニヨッテ

$$\begin{cases} \delta_m(m)=\nu & \cdots\cdots\cdots (4) \\ \delta_m(\mu)\leqq \nu-1 \quad (\mu=1,2,\cdots\cdots,m-1) \end{cases}$$

(3)式ノ右辺カラ分ル様ニ

$\delta_m(\mu+1)>\delta_m(\mu)$ ナルトキハ $\delta_m(\mu+1)=\delta_m(\mu)+1$

デナケレバナラナイ。從ッテ(4)ヨリ $\delta_m(m-1)=\nu-1$ ヲ得ル。

即チ $\delta_m(\mu)$ ナル函數ハ次ノ性質ヲ有スル。

$$\begin{cases} 1. \quad \delta_m(1)\leqq 1 \\ 2. \quad \delta_m(m-1)=\nu-1\geqq 1, \\ 3. \quad \delta_m(\mu)<\delta_m(\mu+1) \text{ ナラバ } \delta_m(\mu+1)=\delta_m(\mu)+1 \end{cases}$$

コレヨリ

$$\delta_m(\mu)=1$$

トナル如キ μ ガ存在スルコトガ知ラレル。斯様ナ μ ノ最小ナ値ヲ m_1 トスルト，

$$\begin{cases} \delta_m(m_1)=1 & (1\leqq m_1\leqq m-1) \\ \delta_m(\mu)\leqq 0 & (\mu=1,2,\cdots\cdots,m_1-1) \end{cases}$$

ガ成リ立ツ。

依ッテ初メノ假定（$m=1,2,\cdots\cdots,m$ マデニ就イテハ條件(I),(II)ガ P_m ノ Aussage トナルタメノ充分條件ナリ

ト云フ）ニヨリ P_m ノ Anfangsschnitt $P_m(m_1)$ ハ一ツノ命題 A_{i_1} トナル。

P_m ヨリ $P_m(m_1)$ ヲ取リ去ッタ残リヲ P_{m-m_1} デ表ハセバ P_{m-m_1} ニ就イテハ

$$\delta_{m-m_1}(m-m_1)=\pi(P_{m-m_1})-\sum_{\lambda=1}^{r}c^{(\lambda)}(P_{m-m_1})\cdot(\lambda-1)$$

$$=\left(\pi(P_m)-\pi(P_{m_1})\right)-\sum_{\lambda=1}^{r}\left(c^{(\lambda)}(P_m)-c^{(\lambda)}(P_{m_1})\right)\cdot(\lambda-1)$$

$$=\left(\pi(P_m)-\sum_{\lambda=1}^{r}c^{(\lambda)}(P_m)\cdot(\lambda-1)\right)-\left(\pi(P_{m_1})-\sum_{\lambda=1}^{r}c^{(\lambda)}(P_{m_1})\cdot(\lambda-1)\right)$$

$$=\delta_m(m)-\delta_m(m_1)$$

然ルニ $\delta_m(m)=\nu$, $\delta_m(m_1)=1$ ナル故

$$\delta_{m-m_1}(m-m_1)=\nu-1$$

同様ニ　　$\delta_{m-m_1}(\mu)\leqq\nu-2$,　　$(\mu<m-m_1)$

ナルコトガ言ヘル。

依ッテ先ノ假定（(1), (2) ガ成立テバ，P_m ハ ν 個ノ Aussagen ニ分解出來ルト云フ）ニヨリ P_{m-m_1} ハ $(\nu-1)$ 個ノ Aussagen $A_{i_2}A_{i_3}\cdots\cdots A_{i_\nu}$ ニ分解サレル。

從ッテ

$$P_m=P_{m_1}P_{m-m_1}=A_{i_1}\overbrace{A_{i_2}\cdots\cdots A_{i_\nu}}^{(\nu-1)}$$

トナリ、P_m ハ ν 個ノ Aussagen ニ分解出來ルコトトナル。

コレデ條件(1), (2) ノ下ニ P_m ハ一般ニ ν 個ノ Aussagen ニ分解出來ルコトガ分ッタ。

従ッテ先ノ P_{m+1} ハ

$$P_{m+1} = C^{(\nu)} P_m$$

$$= C^{(\nu)} A_{i_1} A_{i_2} \cdots\cdots A_{i_\nu} = A_{n+1}$$

（但シ $n = i_1 + \cdots\cdots + i_2$）

トナリ，P_{m+1} ＝就イテモ（I），（II）ガ充分條件デアルコトガ言ハレ，歸納法ニヨリ証明ガ完結サレタ。

上ノ証明中ニ述ベタ $\delta_m(\mu)$ ナル函数ノ性質

$$\begin{cases} \delta_m(m-1) = \nu - 1 \\ \delta_m(m) = \nu \end{cases}$$

ナルコトヨリ直チニ次ノ Korollar ガ得ラレル。

〔Korollar〕

" p_i $(i = 1, 2, \cdots\cdots, a_0)$ 及ビ $C_l^{(\lambda)}$

$(\lambda = 1, 2, \cdots\cdots, r,\ l = 1, 2, \cdots\cdots m_\lambda)$

等ノ文字ヨリナルーツノ順序集合 P_m ガ Aussage ヲ表ハストキハ最後ノ文字ハ p デハナイ。"

扨テ條件（I），（II）ガ P_m ナル順序集合ガ Aussage デアルタメノ必要充分條件デアルコトヲ知レバ，n 次ノ命題ノ数モ下ノ如ク容易ニ求メラレル。

本稿ノ最初ニ當ッテ得タ式

$$\alpha_{n+1} = \Gamma^{(1)} \alpha_n + \sum_{i_1 + i_2 = n} \Gamma^{(2)} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} + \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots + \sum_{i_1 + i_2 + \cdots\cdots + i_r = n} \Gamma^{(r)} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \cdots\cdots\cdots \alpha_{i_r}$$

ニ於イテ右辺ノ各項ニ含マレル $(n+1)$ 次ノ命題ハ何レモ互ニ相異ッテヰル。何故ナラバ，假リニ

$$C_{l_1}^{(\lambda_1)} A_{i_1}^{(1)} A_{i_2}^{(1)} \cdots\cdots A_{i_{\lambda_1}}^{(1)} = C_{l_2}^{(\lambda_2)} A_{i_1'}^{(2)} A_{i_2'}^{(2)} \cdots\cdots A_{i_{\lambda_2}}^{(2)}$$

トスレバ，先ヅ

$$C_{l_1}^{(\lambda_1)} = C_{l_2}^{(\lambda_2)}$$

デナケレバナラナイカラ

$$A_{i_1}^{(1)} A_{i_2}^{(1)} \cdots\cdots A_{i_{\lambda_1}}^{(1)} = A_{i_1'}^{(2)} A_{i_2'}^{(2)} \cdots\cdots A_{i_{\lambda_2}'}^{(2)}$$

コレカラ、更ニ

$$A_{i_1}^{(1)} = A_{i_1'}^{(2)}$$

デナケレバナラナイ。何故ナラバ，コノ両者ノ中何レカ一方例ヘバ $A_{i_1}^{(1)}$ ガ $A_{i_1'}^{(2)}$ ノ echte Anfangsschnitt デアルトスレバ先ノ條件(II)ニヨリ

$$\pi(A_{i_1}^{(1)}) \leqq \sum_{\lambda=1}^{r} c^{(\lambda)}(A_{i_1}^{(1)}) \cdot (\lambda-1)$$

デアルコトが必要デアル。然ルニ $A_{i_1}^{(1)}$ ハーツノ Aussage デアルカラ條件(I)ニヨッテ

$$\pi(A_{i_1}^{(1)}) = \sum_{\lambda=1}^{r} c^{(\lambda)}(A_{i_1}^{(1)}) \cdot (\lambda-1) + 1$$

デナケレバナラナイ。之ハ互ニ矛盾スル．

依ッテ

$$A_{i_1}^{(1)} = A_{i_1'}^{(2)}$$

トナリ，從ッテ又

$$A_{i_\ell}^{(1)} \cdots\cdots A_{i_{\lambda_1}}^{(1)} = A_{i_2'}^{(2)} \cdots\cdots A_{i_{\lambda_2}}^{(2)}$$

トナル。

コレニツイテ前ト同様ノコトヲ繰返セバ，遂ニ

$$A_{i_2}^{(1)} = A_{i_2'}^{(2)}, \cdots\cdots, A_{i_{\lambda_1}}^{(1)} = A_{i_{\lambda_2}'}^{(2)}$$

ヲ得ル。之デ $\mathfrak{A}_{n+1}$ ヲ表ハス先ノ式ノ右辺カラ得ラレル命題ハ何レモ相異ルコトガ分ッタ。

從ッテ一般ニ $\mathfrak{A}_n$ ナル集合ノ元素ノ数即チ n 次ノ命題ノ数ヲ a_n デ表ハストト次ノ回歸公式ガ得ラレル。

$$a_{n+1} = \gamma_1 a_n + \sum_{i_1+i_2=n} \gamma_2 a_{i_1} a_{i_2} + \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots + \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_r=n} \gamma_r a_{i_1} a_{i_2} \cdots\cdots a_{i_r}$$

コニ $\gamma_1, \gamma_2, \cdots\cdots, \gamma_r$ ハ最初ニ言ッタ如ク，位数ガ夫々 $1, 2, \cdots\cdots, r$ ナル Operatoren ノ数ヲ表ハス。

以上。

〔注意〕1. コレマデハ $p_i\ (i=1,2,\cdots\cdots a_0)$ ヲ Aussagen variablen $C_\ell^{(\nu)}$ $(\ell=1,2,\cdots\cdots\gamma_\nu)$ ヲ ν-stelligt logischer Operator ト考ヘタガ，$p_i\ (i=1,2,\cdots\cdots a_0)$

ヲ a_0 個ノ独立変数，$C_\ell^{(\nu)}$ ヲ ν-stellig ナ普通ノ Funktionen ト考ヘルト，上述ノコトハ〃幾ツカノ基本函数（一変数又ハ多変数ノ）ニ n 回 Iteration ヲ施シテ得ラレル形式上異ナル函数ノ数ヲ求メタコト〃ニナル。

以上．(1935, 9, 17)

〔注意〕2 ニツノ Pm ノ μ-Anfangsschnitt 中ニ於ケル

$$\begin{cases} p \text{ ノ数ヲ} & \pi(\mu) \\ C^{(\lambda)} \text{ノ数ヲ} & C^{(\lambda)}(\mu), \\ \sum_{\lambda=1}^{r} C^{(\lambda)}(\mu) \text{ ノ入ヲ} & \omega(\mu), \\ \sum_{\lambda=1}^{r} C^{(\lambda)}(\mu) \text{ ヲ} & n(\mu) \end{cases}$$

デ表ハシ，特ニ

$\pi(m)=\pi$，$C^{(\lambda)}(m)=C^{(\lambda)}$，$\omega(m)=\omega$，$n(m)=n$ トシ，ω ヲ Pm ノ〃Ordnung〃，n ヲソノ〃Grad〃ト名附ケルコトニスレバ，條件(I),(II)ハ次ノ如ク書キ直セル。

$$\text{(I)} \quad \pi = \omega - n + 1$$

$$\text{(II)} \quad \pi(\mu) \leqq \omega(\mu) - n(\mu) \qquad (\mu = 1, 2, \cdots, m-1)$$

更ニ $\pi + n = m$，$\pi(\mu) + n(\mu) = \mu$ ナル関係ヲ用フレバ

$$\text{(I)} \quad m = \omega + 1$$

$$\text{(II)} \quad \mu \leqq \omega(\mu) \qquad (\mu = 1, 2, \cdots\cdots m-1)$$

トナル。