OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	Closure ニ関スル一問題ヘノ Stone ノ定理ノ應用
Author(s)	吉田, 耕作
Citation	全国紙上数学談話会. 1935, 60, p. 15-17
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74138
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

216. Closure ニ関スル一問題ヘノ Stone ノ定理ノ應用

吉田耕作（阪大）

Hilbert space h ニ於ケル unitary transformation ノ one-parameter group $\{U_t\}$ ガ與ヘラレタトキ，h ノ element f ガ如何ナル條件ヲ満足スレバ，closed linear manifold $\{f_t\}=\{U_t f\}$ —— f_t ノ全テデ張ラレル一次空間ノ Abschliessung —— ガ h ニ一致スルカ？

U_t ヲ messbar トスル。即チ任意ノ $f, g \in h$ ニ對シテ $(U_t f, g)$ ナル t ノ函数ガ messbar トスル。然ラバ Neumann ノ示シタ如ク $(U_t f, g)$ ハ t ノ stetig ナ函数ニナルカラ Stone ノ定理ニヨリ

$$(1)\quad (U_t f, g)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\, d(E(x)f, g)$$

コヽニ $E(x)$ ハ或 hypermaximal hermition operator ノ resolution of identity.

故ニ $$(U_t f, g)\frac{\sin \lambda t}{t}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} d(E(x)f, g)\frac{1}{2}\int_{-\lambda}^{+\lambda} e^{it v}\, dv$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} d\left(E(x)f,g\right)\frac{1}{2}\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{it(x+v)}dv$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iwt}dw\,\frac{1}{2}\int_{w-\lambda}^{w+\lambda} d\left(E(x)f,g\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iwt}dw\,\frac{1}{2}\Big[\big(E(w+\lambda)-E(w-\lambda)\big)f,g\Big]$$

縦ッテ

(2) $\frac{1}{2}\Big[\big(E(w+\lambda)-E(w-\lambda)\big)f,g\Big]$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iwt}(U_t f,g)\,\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt$$

定理. $\{U_t f\}$ ガ hy ヲ張ルタメノ必充條件ハ $\{f_\lambda\}=\{E(\lambda)f\}$ ガ hy ヲ張ルコトデアル。

上定理ノ應用トシテ Wiener ノ定理（Fourier integral p.100）ヲ再証明シテミマセウ。即チ

$hy=L_2(-\infty,\infty)$, $U_t f(x)=f(x+t)$ トスルト (2) ヨリ

$$\frac{1}{2}\big(E(w+\lambda)-E(w-\lambda)\big)f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iwt}f(x+t)\frac{\sin\lambda t}{t}dt$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\,\frac{e^{-i(-\lambda-w)t}-e^{-i(\lambda-w)t}}{2it}\,dt$$

故= $f(x)$, $\dfrac{e^{-i(-\lambda-w)t}-e^{-i(\lambda-w)t}}{2it}$, Fourier

Transform ヲ夫々 $F(y)$, $G_{\lambda,w}(y)$ トスレバ

(3) $\frac{1}{2}\left(E(w+\lambda)-E(w-\lambda)\right)F(y)=F(y)\,G_{\lambda,w}(y)$

ココニ

$$\begin{cases} G_{\lambda,w}(y)=\frac{1}{2}, & -\lambda-w<y<\lambda-w \\ \qquad\quad =0, & y<-\lambda-w \text{ or } \lambda-w<y \\ \qquad\quad =\frac{1}{4}, & y=-\lambda-w \text{ or } y=\lambda-w \\ \text{但シ } \lambda>0 \end{cases}$$

偖、F.T.ハーツ、unitary transformation ダカラ $\{E(h)f(x)\}$ が h_y ヲ張ルコトハ $\{E(h)F(y)\}$ が h_y ヲ張ルコトトハ äquivalent。故ニ Wiener ノ定理

$h_y=L_2(-\infty,\infty)$, $U_t f(x)=f(x+t)$

トスルトキ $\{U_t f(x)\}$ が h_y ニ一致スルタメノ必充條件ハ $f(x)$ ノ F.T. $F(y)$ ノ zero points ノ measure 0 ナルコトデアル。

ヲ得ル。

以上 formal ナ計算ヲ行ッテ詳シイ議論ヲシマセンデシタガ計算ノ意味ヲ有スルコトハ x ノ函数 $(E(x)f,g)$ ガ有界変分デアルコトカラタヤスク分リマス。