



Title	一階常微分方程式ノ特異点ニ就テ, II
Author(s)	福原, 満洲雄
Citation	全国紙上数学談話会. 1935, 60, p. 32-38
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74142
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

220. 一階常微分方程式ノ特異点ニ就テ, II

福原満洲雄(北大)

§ 1. $f(x, y)$ が $(0, 0)$ で正則で $f'_y(0, 0) = \lambda \neq 0$ ならば, 一般に

$$(a) \quad x \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

ノ解が Cx^λ (C ハ任意常数)ノ函数ト考ヘテ $(0, 0)$ で正則トナルコトハ既ニヨク知ラレタ事柄デアアル。此ノ古典

的ナ結果ヲ

(f) $f(x, y) = f_0(x) + f_1(x)y + \dots + f_n(x)y^n + \dots$
ガ $0 < x < \delta$, $|y| < \Delta$ デ一様収斂デ, $x \rightarrow +0$ ノトキ

(f_n) $f_n(x) \sim f_{n0} + f_{n1}x + \dots + f_{nm}x^m + \dots$
ナル形 = 近似的 = 展開サレル場合 = 拡張シテ見ヨウ。先ヅ

$$(a) \quad y \sim \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots$$

ガ (a) ヲ形式的 = 満足スルヤウ = 常数 $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ ヲキメル。若シ n が正ノ整数デナケレバ, ソノヤウ = $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ ヲキメルコトが出来ル。而モソノヤウナキメ方ハ唯一通りデアール。

ソノ時 (a) ナル形 = 展開サレル (a) ノ解ガ唯一ツ存在スルコトハ例ノ論法デ証明サレル。若シ $f(x, y)$ ガ x, y ノ正則ナ函数ナレバ, コノヤウ = シテ得ラレタ解ガ $x=0$ デ正則ナ函数デアルコトモ特別 = 証明スルホドノコトモナカラウ。

n が正ノ整数 n = 等シイ場合 = ハ

$$y = \alpha_1 x + \dots + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \alpha_n x^n$$

ト置ケバ前回 = 調べタ場合 = ナル。故 = コノ場合ハ考ヘナイ (勿論逆 = 前回ノ場合ヲ今ノ場合 = 直スコトモ出来ル)

§2. (a) ナル形 = 展開サレル (a) ノ解ヲ $\varphi_0(x)$ トシ勝手ナ C ノ値 = 對シテ形式的 =

(p) $y \sim \varphi_0(x) + \varphi_1(x)Cx^\lambda + \dots + \varphi_n(x)(Cx^\lambda)^n + \dots$
ガ (a) ヲ満足スルヤウ = $\varphi_j(x)$ ヲキメル。 $\varphi_n(x)$ ハ求積法デ求めラレ, $x \rightarrow +0$ ノ時

$$(\mathcal{P}_n) \quad \mathcal{P}_n(x) \sim \mathcal{P}_{n0} + \mathcal{P}_{n1}x + \dots + \mathcal{P}_{nj}x^j + \dots$$

ナル形 = 展開サレル。若シ $f(x, y)$ が (x, y) の正則 + 函数ナラバ $\mathcal{P}_n(x)$ モ $x=0$ ナ正則 + 函数トナルコトハ注意スルマデモナイ。コノデ $\lambda = \mu + i\nu$ ノ実部 μ が正カ, 0カ, 負カ = 依テ三ツノ場合ヲ分ケル。

$\mu > 0$ 此ノ場合 = ハ $(\mathcal{P})$ が (a) ノ解ノ近似展開 = ナル。トイフ意味ハ x が十分 = 小サイ時

$$\left| y - [\mathcal{P}_0(x) + \dots + \mathcal{P}_{n-1}(x) (Cx^\lambda)^{n-1}] \right| < Kx^{n\mu}$$

が成立スルトイフコトデアル。証明ノ方法ハモウ々述ベル必要ハナカラント思フ, 結局

I. 勝手ナ C ノ値 = 對シテ $(\mathcal{P})$ ナル形 = 展開サレル (a) ノ解が唯一ツ存在スル。

トイフ結論ヲ得ル、併シコレダケデ満足スルワケ = ハ行カナイ、更 = 進ンデ

II. 正ノ數 δ_1, Δ_1 が十分小サケレバ $0 < x_0 < \delta_1$, $|y(x_0)| < \Delta_1$ ヲ満足スル (a) ノ解ハ必ズ $(\mathcal{P})$ ナル形 = 展開サレル。

コトが証明サレル。ココマデハ級数 (f) が収斂デアル必要ハナイ。近似的 = (f) が成立スレバヨイ。其ノ意味ハ正ノ整数 n = 對シテ δ', Δ' ヲ十分 = 小サク取レバ $0 < x < \delta'$, $|y| < \Delta'$ ノ時

$$\left| f(x, y) - [f_0(x) + \dots + f_{n-1}(x) y^{n-1}] \right| < K|y|^n$$

が成立スルトイフコトデアル。

III. 級数 (f) が一様収斂ナラバ級数 (φ) も $x=0$ の近傍で一様収斂トナル。

$x \rightarrow +0$ の時

$$\lim x^\lambda [y - \varphi_0(x)] = \varphi_1(0)C$$

トナルコト = 注意シテ、補助変数ヲ含ム微分方程式 = 関スル定理ヲ使ヘバ (a) の解が C の函数ト考ヘテ正則デアルトイフコトがワカル。ソレカラ III が得ラレル。補助変数ヲ含ム微分方程式 = 関シテハ、マタ別ノ機曾 = 触レテ見タイト思ツテキル。

此ノヤリナ方法 = 依ツテ進ンデ行クト、 $f(x, y)$ = 関スル假定が (a) の解 (φ) = ドウ影響シテ來ルカが分レヤリ = 思フ。 $f(x, y)$ の近似展開 = 関シテ、モット別ノ假定ノ取り方モアリ、ソレ = 應ジテ (φ) = 関スル結論が変ツテ來ルが、コノデハコレ以上深入リスルコトヲヨシテ置ク。

§3. $\mu=0$. 此ノ場合 = ハ ($\mu < 0$ デモ同様デアルカ) $x \rightarrow +0$ のトキ $x^\lambda \rightarrow 0$ トナラナイカラ、 x ヲ實変数ト考ヘテ居ル限リ (φ) が近似展開 = ナレトイフコトハ意味ヲナサナイ。

從ツテ前節ノ論法ハコノ場合 = ハ使ヘナイ。ソコデ始メカラ (φ) が収斂トナル場合ヲ目標トシテ次ノヤリ = 考ヘル。

$$(a') \quad x \frac{dy}{dx} = f(0, y)$$

ノ解ヲ $y = \psi(Cx^\lambda)$ デ表ハシ

$$z = y - \psi(Cx^\lambda)$$

ト置キ z が満足スル方程式ヲ

$$(b) \quad x \frac{dz}{dx} = g(x, Cx^\lambda, z)$$

ト書ク。 $g(x, Cx^\lambda, z)$ ヲ形式的 = Cx^λ, z ノ冪級数 = 展開シタ結果ガ

$$0 < x < \delta, \quad |z| < \Delta$$

ノ一様収斂ヲアレヤ $\dot{y} =$, 更 =

$$\frac{f_1(x) - f_1(0)}{x} + \frac{f_2(x) - f_2(0)}{x} y + \dots$$

ノ一様収斂性ヲ假定スル。サウスレバ (b) ガ $x \rightarrow +0$ ノトキ $z \rightarrow 0$ デアレヤ $\dot{y}$ ノ解ヲ唯一ツ持ツコトガ証明サレル。ソレハ C = 関係シテキル。コノ補助変数ヲ含ム微分方程式 = 関スル定理ヲ使ヘバ

IV. $x, |C|$ が十分 = 小サイトキ (a) ノ解ハ (g) ナル形 = 展開サレル (～ハ = デ置換ヘル)

コトガ証明サレル, 従ツテ

V. δ', Δ' が十分 = 小サイトキ $0 < x_0 < \delta', |y(x_0)| < \Delta'$ ヲ満足スル (a) ノ解ハ必ズ (g) ナル形 = 展開サレル (～ハ = デ置換ヘル)

§4. $\mu < 0$. 此ノ場合 = (g) が収斂トナル場合ヲ捜ス (一般 = 収斂トハ限ラナイ) ノハ容易デナイシ, 大シテ重

要デモナイ。此ノ場合ニハ

VI. (a) ハ (x) ナル形ニ展開サレル解ヲ唯一ツ持ツ。
其ノ他ノ解ハ $(0 < x \leq x_0)$ デ存在スルナラバ $x \rightarrow +0$
ノトキ $\lim |y(x)| \geq \Delta'$ トナルヤウナ正ノ数 Δ' が存在
スル。

§5. 以上デハ x ヲ実変数トシタガ, $x = re^{i\theta}$ が
 $r = e^{m\theta}$ (m ハ或キマッタ實ノ常數) ナル曲線, 上ヲ動
クトシテモ全ク同様デアル。

$\mu - \frac{\nu}{m} > 0$ ナラバ §2 =, $\mu - \frac{\nu}{m} = 0$ ナラバ §3 =,

$\mu - \frac{\nu}{m} < 0$ ナラバ §4 = 相當スル結果が得テレル。故ニ若

シ $x = re^{i\theta}$ が動く範圍ヲ

$$0 < r < \delta, \quad m' \leq \frac{\log r}{\theta} \leq m''$$

トスルナラバ, $m' \leq m \leq m''$ デアルヤウナ m ノ或値ニ
對シテ

$$\mu - \frac{\nu}{m} \geq 0$$

トナリサヘスレバ級數 (φ) ハ收斂トナル。 $f(x, y)$ が
 $(0, 0)$ デ正則トイフ場合ハ $m' = -\infty$, $m'' = +\infty$ デア
ルカラ, (φ) ノ收斂性が余ラナイノハ入ガ負ノ實數トイフ場
合ガケニナル。

コノヤウニ $f(x, y)$ ノ展開ニ關スル假定ト, 級數 (φ)

ノ性質トノ間ノ關係ハ實ニ密接、明瞭ナノデアル。

從來ノ優級數ニヨル方法ハ手取り早イカモ知レナイガ、コノ
ヤリナ現象マデ説明スルコトハ出来ナイカラ何トナク物足り
ナサテ感ズル。