



Title	微分法二就テ I
Author(s)	南雲, 道夫
Citation	全国紙上数学談話会. 1935, 60, p. 38-45
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74143
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

221. 微分法ニ就テ I

南 雲 道 夫 (阪大)

微分法ヲ一般化或ハ抽象化スルコトハ己ニ種々ナ方向ニ於テ多ク試ミラレタ。平素文献ニ暗イ自分ハ、ソレ等ノコトニツイテ殆ソド全ク何も知ラナイ故、之レニツイテ語ルコトハ出来ナイ。此処デハ只古典的ナ微分法ヲ少シク抽象的ナ見地カラ復習ヲシテ見タイト思フ。考ヘハ古典的ナモノト並行ナモノニスギナイカラ、本質的ニハ別ニ新シイモノデハナイ。

要スルニ線状空間ニ於ケル函数ニツイテ、ソノ微分、高階微分、解析函数及ビ微分方程式ヲ考察スルノが目的デアル。微分ノ概念ハ高次ノ無限小ヲ無視スルトキ、函数ノ変化ガ線状函数ト考ヘラレルト云フコトニ基礎ヲ置ケモノデアル。

§1. 微分商及ビ微分

先ヅ線状空間トハ次ノ性質ヲ有スルモノヲ云フ。

(i) $\mathcal{L}$ = 属スル任意ノ有限個ノ要素 $\alpha_1, \dots, \alpha_n =$
ツイテ其ノ 一次的結合

$$C_1 \alpha_1 + \dots + C_n \alpha_n$$

が定義サレル。 $C_1, \dots, C_n$ ハ任意ノ實数デアル。

即チ $\mathcal{L}$ ハ普通ノ *Vektor* ノ空間ト同様ノモノデアル。

(ii) $\mathcal{L}$ ノ要素 $\alpha =$ ハソノ 絶対値 $|\alpha|$ ナル實数が定義サレル。 $|\alpha|$ ハ次ノ性質ヲ有スル。

$$|\alpha| \geq 0 \quad \text{丁度} \quad \alpha = 0, \text{ 時} = \quad |\alpha| = 0$$

$$|\alpha + b| \leq |\alpha| + |b|$$

$$|c \alpha| = |c| |\alpha| \quad c \text{ ハ實数}$$

次ニ $|\alpha - b|$ ヲ α, b 間ノ距離ト云フ。之レニヨツテ極限が普通ノ通りニ定義サレル。 $\mathcal{L}$ が完全ニ距離空間ヲナストキ之ヲ完全ニ線狀空間ト呼ブ。(完全トハ *Cauchy* 収斂條件が成立スルコトヲ云フ)

ニツノ線狀空間 $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ ガアツテ $\varphi \in \mathcal{L}_1, \psi \in \mathcal{L}_2$ トスルトキ 線狀函数 トハ次ノ性質ヲ有スル函数 $\psi = f(\varphi)$ ヲ云フ。

$$(i) \quad f(C_1 \varphi_1 + \dots + C_n \varphi_n) = C_1 f(\varphi_1) + \dots + C_n f(\varphi_n).$$

$$(ii) \quad |f(\varphi)| \leq M |\varphi| \text{ ナル一定ノ正数 } M \text{ が存在ス。}$$

線狀函数ニヨル $\mathcal{R}$ ヲ $\mathcal{R}'$ ハノ寫像ヲ普通大キナローマ字ヲ表ハス。例ヘバ

$$\psi = f(\varphi) = \mathbb{T} \varphi$$

ノ如シ。 $\mathcal{L}_1$ カラ $\mathcal{L}_2$ へノ線状寫像ノ集合ハ

$$(c_1 T_1 + \dots + c_n T_n) \varphi = c_1 T_1 \varphi + \dots + c_n T_n \varphi$$

及ビ

$$|T| = \frac{|T \varphi|}{|\varphi|} \quad \text{ノ上限}$$

ナル定義ニヨツテ又 $\mathcal{L}_1$ ノ線状空間ヲ作ル。之ヲ $[\mathcal{L}_2(\mathcal{L}_1)]$ デ示ス。

微分ノ定義函数

$$y = f(\varphi) \quad (\varphi \in \mathcal{D}_1 \subset \mathcal{L}_1, y \in \mathcal{D}_2 \subset \mathcal{L}_2)$$

ニ於テ $\varphi = \varphi_0 + \Delta \varphi$, $\Delta y = f(\varphi_0 + \Delta \varphi) - f(\varphi_0)$ ト
スルトキ

$$\Delta y = T(\varphi_0) \Delta \varphi + \varepsilon(\varphi_0, \Delta \varphi)$$

$$|\varepsilon(\varphi_0, \Delta \varphi)| = o(|\Delta \varphi|),$$

但シ $T(\varphi_0) \Delta \varphi$ ハ $\Delta \varphi$ ノ線状函数ナラバ $T(\varphi_0)$ ヲバ φ_0

ニ於ケル $y = f(\varphi)$ ノ φ ニ関スル微分商トイフ。之レヲ

$\left(\frac{dy}{d\varphi} \right)_{\varphi_0}$ 又ハ $f_{\varphi}(\varphi_0)$ デ示ス。微分商ハ $\mathcal{L}_1$ カラ $\mathcal{L}_2$ へ
ノ線状寫像デアル。

$$\text{即チ } \frac{dy}{d\varphi} = f_{\varphi}(\varphi) \in [\mathcal{L}_2(\mathcal{L}_1)]$$

微分商ハ一義的ニ決定スル、証明ハ

$$\Delta y = T_1(\varphi_0) \Delta \varphi + \varepsilon_1(\varphi_0, \Delta \varphi)$$

$$= T_2(\varphi_0) \Delta \varphi + \varepsilon_2(\varphi_0, \Delta \varphi)$$

$$|\varepsilon_i(\varphi_0, \Delta \varphi)| = o(|\Delta \varphi|)$$

$$\text{カヲ} \quad \{T_1(\varphi_0) - T_2(\varphi_0)\} \Delta \varphi = \varepsilon_3(\varphi_0, \Delta \varphi) \\ |\varepsilon_3(\quad)| = o(|\Delta \varphi|)$$

$$\Delta \varphi = c \varphi, \text{ トオケバ}$$

$$\{T_1 - T_2\} \varphi_1 = \frac{o(|c|)}{|c|}$$

故 = $c \rightarrow 0$ の極限 = 於テ (左辺ハ $c \neq 0$ 故)

$$\{T_1 - T_2\} \varphi_1 = 0. \quad \text{即チ } T_1 = T_2. \quad (\text{証明了})$$

特 = $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ が有限次元ノ空間デ $\varphi = (x_1, \dots, x_k),$
 $y = (y_1, \dots, y_l)$ トスレバ, 微分商ハ行列 (Matrix)

$$\frac{dy}{d\varphi} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_k} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_l}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_l}{\partial x_k} \end{pmatrix}$$

デ表ハサレル。一般ノ線形空間ノ場合ニハ、微分商ヲ一定ノ
 合リ易イ形式ニ表ハスコトハ困難デアル。

次ニ微分商ニ對シテ $dy = f(\varphi)$ ノ 微分ヲバ

$$dy = f_\varphi(\varphi) \varphi' \quad (\varphi' \in \mathcal{L}_1, \text{ 従ッテ } dy \in \mathcal{L}_2)$$

デ定義スル。 φ' ハ φ トハ独立ナ $\mathcal{L}_1$ ノ任意ノ要素デアル。

(φ' ハ $\Delta \varphi$ トハ別物デアル!) 今 φ 7 φ 自身ノ函数ト考ヘ
 レバ明ラカ =

$$d\varphi = \varphi' \in \mathcal{L}_1$$

故 =

$$dy = f_y(y) dy = \frac{dy}{dy} dy.$$

微分商 $\frac{dy}{dy}$ は $\mathcal{L}_1$ から $\mathcal{L}_2$ へ、線状写像であるが、微分 dy , dy は夫々 $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ に於ける変数である。

多元函数、微分 k 個の線空間 $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \dots, \mathcal{L}_k$ が有り、その各要素を $y_1, y_2, \dots, y_k$ とスルとき、
 $(y_i \in \mathcal{L}_i)$ の組合せ $(y_1, \dots, y_k) = y$ とスル空間を $\mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_2 \times \dots \times \mathcal{L}_k$ と示す。

$\mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_2 \times \dots \times \mathcal{L}_k$ は k 次元結合、

$$y^{(\nu)} = (y_1^{(\nu)}, \dots, y_k^{(\nu)})$$

とスルとき

$$\sum_{\nu} c_{\nu} y^{(\nu)} = \left(\sum_{\nu} c_{\nu} y_1^{(\nu)}, \dots, \sum_{\nu} c_{\nu} y_k^{(\nu)} \right)$$

と定メル、又

$$|y| = \sqrt{|y_1|^2 + \dots + |y_k|^2}$$

$$\text{或ハ } |y| = |y_1| + \dots + |y_k|$$

等 = ヲツテ絶対値ヲ定義スルハ $\mathcal{L}_1 \times \dots \times \mathcal{L}_k$ ハ線状空間トナル。 $(|y|)$ の定義、仕方ハ尚種々アルが、絶対値、基本的性質及ビ $|(0, \dots, 0, y_i, 0, \dots, 0)| = |y_i|$ が成立スルヤ否ニ定義スルハヨイ。要スルニ topologisch 同値ナルコトが主要である。

$y = f(y_1, \dots, y_k)$ が $(y_1, \dots, y_k) = y$ といフ微分可能トスルハ微分ノ定義カラ容易ニ

$$dy = \frac{\partial f}{\partial \varphi_1} d\varphi_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial \varphi_k} d\varphi_k$$

ヲ得ル。 $\frac{\partial f}{\partial \varphi_i}$ ハ f ノ φ_i ノミニツイテノ (他ノ φ_j ハ一定トシテ) 微分商デアアル。

微分商ノ基本的性質 先ツ

$y = f(\varphi)$ が φ_0 デ微分可能ナラバ, $f(\varphi)$ ハ φ_0 デ連続デアアル (証明容易)。

$$\text{次ニ } y = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n \quad (y_\nu \in \mathcal{L}_2)$$

$y_\nu = f_\nu(\varphi)$ が φ_0 デ微分可能ナラバ, $\varphi_0 =$ 於テ

$$\frac{dy}{d\varphi} = c_1 \frac{dy_1}{d\varphi} + \cdots + c_n \frac{dy_n}{d\varphi}$$

(証明容易)

又 $y = f(\varphi)$ が φ_0 デ微分可能デ $y_0 = f(\varphi_0)$, 且ツ $z = g(y)$ が y_0 デ微分可能ナラバ ($\varphi \in \mathcal{L}_1, y \in \mathcal{L}_2, z \in \mathcal{L}_3$) $\varphi_0 =$ 於テ

$$\frac{dz}{d\varphi} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{d\varphi} = g_y(y_0) f_\varphi(\varphi_0)$$

$$\text{証明ハ } \Delta z = g_y(y_0) \Delta y + \varepsilon'(\varphi_0, \Delta y)$$

$$|\varepsilon'(\quad)| = o(|\Delta y|)$$

$$= \text{於テ } \Delta y = f_\varphi(\varphi_0) \Delta \varphi + \varepsilon(\varphi_0, \Delta \varphi)$$

$$|\varepsilon(\quad)| = o(|\Delta \varphi|)$$

ヲ代入スレバヨイ (線状函数ノ定義参照)

同様=多元函数 $z = f(y_1, \dots, y_k)$ が $(y_1^0, \dots, y_k^0)$ で微分可能で, $y_i^0 = \varphi_i(\varphi_0)$, $y_i = \varphi_i(\varphi)$ が φ_0 で微分可能ならば φ_0 = 於て

$$\frac{dz}{d\varphi} = \frac{\partial z}{\partial y_1} \frac{dy_1}{d\varphi} + \dots + \frac{\partial z}{\partial y_k} \frac{dy_k}{d\varphi}$$

次=最も特別の場合トシテ, z が y の線状函数

$$z = T y$$

ナルトキ = ハ直チ=

$$\frac{dz}{d\varphi} = \frac{d}{d\varphi} (T y) = T \frac{dy}{d\varphi}.$$

ヲ得ル。

$$\textcircled{D} \text{ 内 } \frac{dy}{d\varphi} = 0 \text{ ならば } \textcircled{D} \text{ 内 } y = \text{一定} \text{ ナル。}$$

($\textcircled{D}$ ハ連結領域)

証明. $\textcircled{D}$ 内, ニ点 φ_1 及ビ φ_2 ヲバ屈折線ヲ結ビ, ソノ各線分ノ継ぎ目=於ケル y が等シイコトヲ言ヘバヨイ。従ツテ φ_1, φ_2 ヲ結ブ線分 $y(t) = (1-t)\varphi_1 + \varphi_2$ $0 \leq t \leq 1$ が $\textcircled{D}$ = 属スル場合ノミヲ考ヘル。

$$u = l(y) \quad u \text{ 實数}$$

ヲ任意ノ線状函数トスルトキ

$$\frac{du}{dt} = \frac{d}{dt} l(y(t)) = l \frac{dy}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = 0$$

故=

$$u(y_1) = u(y_2)$$

u は y = ツキ任意ノ線状函数デアルカラ

$$y_1 = y_2 \quad (\text{証明了})$$

〔注意〕 上ノ証明デハ次ノコトヲ用ヒタ。

線状空間 $\mathcal{L}$ ノ二点 α_1, α_2 ガアルトキ, $\mathcal{L}$ = 於ケル任意ノ実数值ヲ取ル線状函数ヲ $u(\varphi)$ トスレバ常ニ

$$u(\alpha_1) = u(\alpha_2)$$

ナラバ,

$$\alpha_1 = \alpha_2$$

デアル。此ノコトハ具体的ニ與ヘラレタ線状空間ニ於テハ容易ニ証明出來ル。只抽象的ナ線状空間デハ自明トハ言ハレナイ。之レハ α_1, α_2 ヲ含ム二次元ノ線状空間 $\mathcal{L}_2(\mathcal{L})$ = 於テ定義サレタ線状函数 $u(\varphi)$ が $\mathcal{L}$ 全体ノ線状函数 (連続ナ) = 拡張出來ルコトが合ツテキレバ容易ニ証明出來ル。此ノ後ノ定理ノ証明ニハ抽象論ニ特有ナ *Wohlord-nungssatz* ヲ用ヒル (功力氏抽象空間論第四章192頁参照)。カナル証明法ヲ好マナイ人ハ, カナル定理ヲバ線状空間 $\mathcal{L}$ = 關スルーツノ條件トシテ付ケ加ヘレバヨイ。

未知本論ノ入口ノ所デアルガ, 紙上談話會ノ締切りノ日トナツタカラ, 以下次号ニ譲ルコトニスル。何デカクデラヌ事バカリ長タラシク書イテ面目ナイ次第デアル。(ツジク)