



Title	或ル種ノ線状移動可能函數方程式ニ就イテ（Ⅲ）
Author(s)	北川, 敏男
Citation	全国紙上数学談話会. 1935, 61, p. 8-16
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74146
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

224. 或ル種ノ線狀移動可能函數方程式 ニ就イテ (Ⅲ)

北川 敏 男 (阪大)

7. Euler-Maclaurin ノ定理ヲ擴張スル前ニ、
一應、前節ノ Bernoulli's polynomials ヲ顧ミテ
置キタイ。吾々ノ目標ハ既ニ掲ゲタ。今ハソノ準備デアル。
ケレドモ、目標ニ因ハレテ途中ヲ、輕易ニ過ガルベキデモア
ルマイト思ハレル。

L. M. Milne-Thomson ハ Proc. London
Math. Soc (2) 35, ニ於イテ、Bernoulli, Euler,
Hermite 等ノ polynomials ヲ含ム ϕ -polyno-
mials 導入ノ一方法ヲ提示シタ。

コノハ、degree ν , order n ノ ϕ -polyno-
mials $\phi_\nu^{(n)}(\lambda)$ ヲ次ノ式ニヨツテ定義スル：

$$f(\lambda, n) e^{x\lambda + g(\lambda)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\lambda^\nu}{\nu!} \phi_\nu^{(n)}(\lambda)$$

但シ、 $f(\lambda, n)$, $g(\lambda)$ ハ x ノ或ル range ニ於イテ、
右辺ガ入ノ様收斂級數ニナルトイフ條件以外、全ク任意デ
アル。例ヘバ

$$\text{Bernoulli: } f(\lambda, n) = \frac{\lambda^n}{(e^\lambda - 1)^n} \quad g(\lambda) = 0$$

$$\text{Euler: } f(\lambda, n) = \frac{2^n}{(e^\lambda + 1)^n} \quad g(\lambda) = 0$$

$$\text{Hermite I: } f(\lambda, n) = \frac{\lambda^n}{(e^\lambda - 1)^n} \quad g(\lambda) = e^{-\frac{\lambda^2}{2}}$$

$$\text{Hermite II: } f(\lambda, n) = \frac{\lambda^n}{(e^\lambda - 1)^n} \quad g(\lambda) = e^{-\frac{\lambda^2}{2}}$$

吾々ノ、コノデ問題トシヤウトスルノハ、 $f(\lambda, n)$ ノ
トリ方デアル。

今、linear transl. diff. operator $\Gamma f(x)$
ニ関シテ

$$G(\lambda) = \sum_{k=0}^m \lambda^k \int_{a-0}^{b+0} e^{\lambda t} d\varphi_k(t)$$

然ルトキ

$$\underbrace{\Gamma \Gamma \cdots \Gamma}_{n \text{ 回}} f(x) (\equiv \Gamma^n f(x) \text{ ト置 } \eta) = \text{對應スル母函}$$

數 $G_n(\lambda)$ ハ $G(\lambda)^n$ デアル:

$$\Gamma_x^n e^{x\lambda} = G_n(\lambda) e^{\lambda x} = G(\lambda)^n e^{\lambda x}$$

コレハ、容易ニ verify 出來ル。

茲ニ於イテ、 $\Gamma f(x)$ ニ高次 Bernoulli-polynomials
ヲ導入スル式ハ

$$\frac{e^{x\lambda}}{G(\lambda)^n} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda^\nu B_\nu^{(n)}(x)$$

$$(\text{即チ } f(\lambda, n) = \frac{1}{G(\lambda)^n})$$

ニ依レバヨイ。(前節ニ述べタノハ、 $n=1$ ノ場合デアル)

吾々ノ場合ハ、 ϕ -polynomes = 含まレル。ケレドモ、
linear translatability ノ故ニ、 $f(\lambda, n)$
 ガマ、明瞭ニ意味ヲモツタト云ヘヨウカ。

$$\text{Bernoulli: } \Gamma f(x) = f(x+1) - f(x)$$

$$\text{Euler: } \Gamma f(x) = \frac{f(x+1) + f(x)}{2}$$

ナルガ故ニ、是等ハ吾々ノ特別ノ場合デアアル。

尚次ノコトヲ *remark* シテ置キタイ。

(i) 任意ノ *linear translatable operator*
 Γ = 對シテ —— ソノ母函数ヲ $G_{\Gamma}(\lambda)$ トスル ——

$$\frac{T_x e^{x\lambda}}{G(\lambda)^n} = \frac{G_{\Gamma}(\lambda) e^{x\lambda}}{G(\lambda)^n} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda^{\nu} T_x B_{\nu}^{(n)}(x)$$

ナルガ故ニ、 $T_x B_{\nu}^{(n)}(x)$ ガ簡單ニ計算サレル。

(ii) *Complementary argument theorem*

$$B_{\nu}^{(n)}(n-x) = (-1)^{\nu} B_{\nu}^{(n)}(x) \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots)$$

$$(n = 1, 2, 3, \dots)$$

成立スルタメノ必充條件ハ

$$e^{\lambda} G(\lambda) = G(-\lambda)$$

証明: 先ッ

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda^{\nu} B_{\nu}^{(n)}(n-x) = \frac{e^{(n-x)\lambda}}{G(\lambda)^n} = \frac{e^{-x\lambda}}{(e^{-\lambda} G(\lambda))^n}$$

今 $e^{\lambda} G(-\lambda)$ ヲ母函数トスルヌメノ *linear transl.*
differential operator ヲ求メテミヌ。

$$e^{\lambda} G(-\lambda) = \sum_{k=0}^m (-\lambda)^k e^{\lambda} \int_{a-0}^{b+0} e^{-\lambda t} d\varphi_k(t) \\ = \sum_{k=0}^m \lambda^k F_k(\lambda)$$

但シ

$$F_k(\lambda) \equiv (-1)^k e^{\lambda} \int_{a-0}^{b+0} e^{-\lambda t} d\varphi_k(t)$$

ト置フ.

茲デ

$$\varphi_k^*(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ity} - 1}{y} F_k(-iy) dy$$

ト置ケバ

$$F_k(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda t} d\varphi_k^*(t) \quad (*)$$

トナル。(*)ヲ充タス有界変分函数 $\varphi_k^*(t)$ 之 essential-ly = ハ一意ニ決定スル。(Bochner; Vorlesungen über Fouriersche Integral, p 66 Satz 17 参照)

依ツテ

$$e^{\lambda} G(-\lambda) = \sum_{k=0}^m \lambda^k \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda t} d\varphi_k^*(t)$$

茲ニ, $\varphi_k^*(t)$ 之積分ノ range が $(-\infty, \infty)$ デア

リ。今スデ吾々が論ジテキタノハ、有限區間デ「ツタ」ト、

一見相ソハナイ。ケレドモ、コノ場合 $F_k(\lambda)$ ノ形カラ見ラレ
ル如ク、取扱ヒハ今マデト同様デアリ得ル。

依ッテ與ヘラレタ $G(\lambda) = \text{對シテ}$

$$G^*(\lambda) = \sum_{k=0}^m \lambda^k \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda t} dg_k^*(t)$$

ヲ母函数トスル *linear transl. operator* が求マツ
タ。今

$$\frac{e^{x\lambda}}{G^*(\lambda)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda^{\nu} B_{\nu}^{*(n)}(x)$$

ト置クト、一般ニ

$$B_{\nu}^{(n)}(n-x) = (-1)^{\nu} B_{\nu}^{*(n)}(x)$$

トナルコトヲ知ル。

Complementary theorem が成立スルタメニハ

$$B_{\nu}^{*(n)}(x) = B_{\nu}^{(n)}(x) \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots)$$

$$(n = 1, 2, 3, \dots)$$

が成立スルコトが必充條件デアル。

コレハ、

$$e^{-\lambda} G(\lambda) = G(-\lambda)$$

トイフ條件ト *equivalent* デアル。

8. 前節カラ次ノ諸問題が蜂起シテクル。筆者ニハ、何
ノ對案モナイ。御高教ヲ仰グ次第デス。

I. *linear translatabl operator, one-
parameter group* = 關シテ

Λf が與へたトキ、 n が正ノ整数ナラバ、 $\Lambda^n f$ ハ一意的ニ定義サレタ。コレヲ拡張シテ任意ノ実数 λ ニツイテ、 $\Lambda^\lambda f$ が一意的ニ定義シエナイカ。ソレが確立サレタ曉ニハ $\{\Lambda^\lambda f\}$ ハ λ = 関シテ *one-parameter group* ヲツクル。

空想ハ先キヲ行フ。Operator $\Gamma^\lambda f$ が定義サレタラ母函数ハ次ノ式ヲ與ヘラレハシマイカ。

$$\Gamma^\lambda e^{\lambda x} = G(\lambda)^\lambda e^{\lambda x}$$

ケレドモ、一般ニハ多價函数トナル $G(\lambda)^\lambda$ 如何ナル *branch* ヲトルベキカ、顧ルト空漠デアアル。

問題ヲ Laplace-Integral = 変形シテ云ヘバ次ノヤウニナル。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda t} d\varphi(t) \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda t} d\psi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda t} dg(t)$$

ト

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t-u) d\psi(u)$$

トハ *equivalent* デアル。故カラ 今、有界変分ノ函数ノ family $\{\varphi_\lambda(t)\}$ が與ヘラレテ

$$(i) \quad \varphi_{a+b}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_a(t-u) d\varphi_b(u)$$

が任意ノ a, b ニ對シテ成立スル。

(ii) $\varphi_1(t)$ が與ヘラレタ $\varphi(t)$ ト一致スル。

(i), (ii) の性質ヲモテバ, Λf ヲ含ム *One-parameter group* が存在スルコトニナル:

$$\Lambda^\lambda f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+t) d\varphi_\lambda(t)$$

シカシ, 問題ノ変形ハ, 今ノ場合解決ヲ容易ナラシメハ
シナイデアラウ。 $\{\varphi_\lambda(t)\}$ ト $\{G(\lambda)\}$ トノ間ニハ

$$\varphi_\lambda(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} G(-iy)^\lambda \frac{e^{ity} - 1}{iy} dy$$

ナル関係ガアル。 $G(\lambda)^\lambda$ = 伴フ多價性ハ, 又 $\varphi_\lambda(t)$ = 影響シ
テ來ルデアラウ。若シ, $G(-iy)$ が y ノ函数トシテ, 例
ヘバ常ニ負ニナラヌ實數値ヲトルトスレバ, 注意ノ實數 λ = 對
シテ $G(-iy)^\lambda$ ハ負ニナラヌ實數トシテ一意ニキマリ $\varphi_\lambda(t)$
ガ一意ニ決定スル。ケレドモ、斯ル結果本位ノ方針ハ將來伴
ヒ起ルベキ諸問題ヲ解決スル力ヲ有シ得ルトモ思ハレナイ。
多價性ヲ如何ニ解スベキカ、問題ハ残ル。

II. 線狀可遷作用子ノ *Factorisation* ノ問題

Linear translat. Operator ノ *Factori-*
sation ハ、如何ナル *linear translat. operator*
ヲ、*irred.* ト見做スカニ依ツテ問題ノ局面ガ一変スル。
ユノ問題ハ、換言スレバ母函数 $G(\lambda)$ ノ *Factorisation*
ニ外ナラナイ。

如何ナル目的カ知ラナイガ, *Ritt* ハ嘗ツテ *exponen-*
tial sum

$$1 + a_1 e^{\lambda_1 \lambda} + a_2 e^{\lambda_2 \lambda} + \dots + a_n e^{\lambda_n \lambda}$$

1 Factorisation ヲ論ジタ。(Transact. American Math. S. 29) コノ意圖ヲ、続行シテ一般ノ母函数ニ及ブコトニハ、多大ノ暗礁ヲ見ル。今、何ノ結果モ得テモナシ。事ノ易キニ就イテ、 $G(\lambda)$ ノ分解ヲ極度ニ擴張シ続ケテ了ヘバ、ソレハ $G(\lambda)$ ヲ函数論デ行フ canonical products デ表現スルコトデアイル。コノ立場ニ相當スルモノ、ソレハ Linear transl. operator ヲ無限次ノ微分形式ニ直スコトデアイル：

$$\int_{a-0}^{b+0} f(x+t) d\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} \int_{a-0}^{b+0} t^n d\varphi(t)$$

コノ方法ノ實行ニハ、多クノ制限ガ收斂ヲ保証スルタメニ必要ニナツテクル。

III. ϕ -polynomials ニ於イテ、定義ノ式 $= g(\lambda)$ ガ入ッテ來タ。吾々ハ $g(\lambda) = 0$ ノ場合シカ考ヘテ來ナカッタケレドモ $g(\lambda) = 0$ 對シテ、明確ニ意味ヲ與ヘルコトハ、operational calculus ニ殘サレターツノ問題デアロウト思フ。或ハ既ニ解決ズミデアルカモ知レナイ。御存知ノ御方ニハ是非教ヘテ戴キタイト思ヒマス。

9. Euler-Maclaurin ノ定理ノ擴張ニハ

$$J = \Gamma_{\xi} \left\{ \int_0^{\xi-x} B_n(x+\eta) f^{(n+1)}(\xi+x-\eta) d\eta \right\}$$

コレニ對シテ部分積分法ヲ $\int_0^{\xi-x}$ ニ関シテ施シテ

$$J = B_n(x) \Gamma_{\xi} \left\{ f^{(n)}(\xi + X) \right\} \\ + \Gamma_{\xi} \left\{ \int_0^{\xi-x} B_{n-1}(x+\eta) f^{(n)}(\xi + X - \eta) d\eta \right\} \quad (n \geq 1)$$

ナル漸化式ヲ得ル、コレカラ

$$f(X+x) = \sum_{k=0}^n B_k(x) \Gamma_{\xi} \left\{ f^{(k)}(\xi + X) \right\} \\ - \Gamma_{\xi} \left\{ \int_0^{\xi-x} B_n(x+\eta) f^{(n+1)}(\xi + X - \eta) d\eta \right\}$$

コノ Euler-Maclaurin ノ定理ニ外ナラナシ。

—— (続 7) ——