OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	微分法ニ就イテ, II
Author(s)	南雲, 道夫
Citation	全国紙上数学談話会. 1935, 61, p. 22-30
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74149
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

227. 微分法ニ就イテ, II

南雲道夫（阪大）

前号；論文221ニ於ケル内容カラ、已ニ私ノ目的ガ如何ナルモノカハ大体御ワカリノコトト思フ。筆者ノ目的ハ實函数論的ナ方面（正則性ノ假定ヲ減ズルコトニヨリ一般的ナ結果ヲ目指スモノ）デハナクテ、ムシロ正則性ヲ保チナガラ微分法ノ適用範囲ヲ拡大スルニアル。即チ有限次元ノ函数ノミナラズ函数空間ノ如キモノニモ共通スル微分法ヲ論ズルコトガ主眼デアル。ソノタメニ筆者ハ線狀函数ヲ基礎トシ、無限小ナ部分ヲバ線狀函数ト見做スコトヲ微分法デアルト考ヘル。　從ッテ微分法ノ對象ガ線狀空間内ニカギラレタノデアル。

以上ガ私ノ考ヘノ全部デアル。本質的ニハ別ニ新ラシイモノデハナイ、只アマリニ文献ニ暗イノデ、未ダカヽルコトガ表面カラ取扱ハレテアルコトヲ知ラナイ，切ニ識者ノ御教示ヲ仰ガ所以デアル。

§2. 獨立変數ガ實數ノ場合

此ノ論文デハ、獨立変数モ從属変数モ一般ノ線狀空間ノ要素デアルモノヲ主眼トスルノデアルガ、特ニ獨立変数ガ實数ノ場合ヲ考ヘルコトハ補助トシテ必要デアル。

tガ實数ノ時ニハ，

$$\frac{d\xi}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\xi(t+\Delta t)-\xi(t)}{\Delta t}$$

デ、$\frac{d\xi}{dt}$ ハ ξ ト同ジ線狀空間 $\mathcal{L}$ =屬スル。此ノ場合=ハスベテ普通ノ微分法ト同樣=考ヘラレル。

$\boxed{\frac{d\xi}{dt}=0 \text{ ニ就テ}}$ 一般= $\frac{d\eta}{d\xi}=0$ ナルトキ ξ ノ領域が連結ナラバ η= 一定ナルコトヲ、スデ=前号デ証明シタ、併シ前号デハ〃一般ノ線狀空間 $\mathcal{L}$ = 含マレタ二次元ノ線狀空間デ定義サレタル線狀函數（実數値）ハ、$\mathcal{L}$ 全体デ連続ナ線狀函數=拡張出來ル〃トイフ定理ヲ用ヒタ、シカシソノ定理ノ証明ハ超限的論法=ヨルノデアル。

$\frac{d\eta}{d\xi}=0$ ナル問題ハ $\xi=\xi(t)$〔t ハ實變數〕トオクコトニヨリ寔易=、$\frac{d\xi}{dt}=0$ ナル形式ノ問題=改メラレル。此ノ場合=ツイテ $\xi=$ 一定ナルコトハ直接=証明出來ル。ソノ考ヘハ寺阪君が暗示サレタモノデアル。

$|\xi(t_2)-\xi(t_1)|$ ヲバ區間〔t_1, t_2〕=於ケル $\xi(t)$ ノ変化ト名付ケル。問題ハ區間〔0, 1〕=於ケル $\xi(t)$ ノ変化 $|\xi(1)-\xi(0)|$ が零ナルコトヲ証明スレバヨイ。〔0, 1〕ヲ二等分シ、〔0, $\frac{1}{2}$〕ト〔$\frac{1}{2}$, 1〕ノ内デ $\xi(t)$ ノ変化ノ大ナル（小ナラザル）方ノ區間ヲ I_1 ト名付ケ、I_1 =於ケル $\xi(t)$ ノ変化ヲ $v(I_1)$ デ示セバ、

$$|\xi(1)-\xi(0)|\leqq 2v(I_1).$$

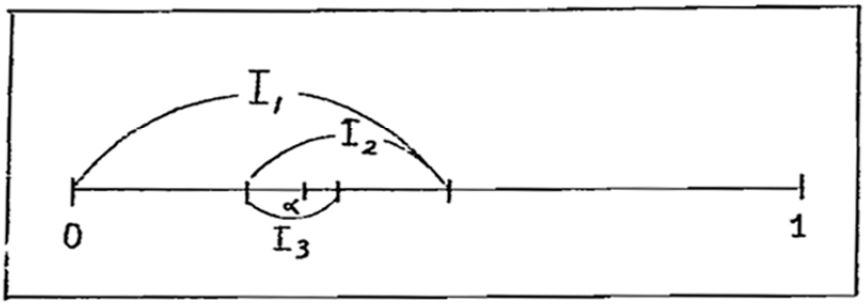
次ニ I_1 ヲ更ニ二ツノ区間ニ等分シ、ソノ内デ $\varphi(t)$ ノ変化ノ大ナル（ホナラザル）方ヲ I_2 トスレバ，

$$|\varphi(1)-\varphi(0)| \leqq 4\nu(I_2).$$

以下同様ニシテ

$$|\varphi(1)-\varphi(0)| \leqq 2^n \nu(I_n),$$

$$[0,1] \supset I_1 \supset I_2 \supset \cdots\cdots \supset I_n \supset \cdots\cdots.$$



スベテノ I_n ニ共通ナル一点ヲ α トスル。

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_\alpha = 0$$

ナルニヨリ，

$$\alpha-\delta(\varepsilon) < t_1 \leqq \alpha \leqq t_2 < \alpha+\delta(\varepsilon)$$ トスレバ，

$$|\varphi(t_2)-\varphi(t_1)| \leqq \varepsilon(t_2-t_1)$$

故ニ充分 n ガ大ナルトキ，$\nu(I_n) \leqq \varepsilon \cdot (I_n$ ノ長サ$) = \varepsilon \frac{1}{2^n}$.

従ッテ

$$|\varphi(1)-\varphi(0)| \leqq \varepsilon.$$

故ニ（$\varepsilon \to 0$ トスレバ）$\varphi(1)=\varphi(0)$. （証明了）

$\int_a^b \varphi(t)\,dt$ 独立変数 t が実数、$\varphi(t)$ が<u>モノ連続函数</u>ナラバ、ソノ積分（Riemann 積分）ハ、普通ノ

場合ト同様ニ、tノ區間ヲ細分シタ場合ノ和ノ極限トシテ定義サレル。

$$\int_a^b \varphi(t)\,dt = \lim_{\Delta\to 0} \sum_{i=1}^{n} \varphi(\tau_i)\Delta t_i,$$

$\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, $t_0 = a$, $t_n = b$, $t_{i-1} < \tau_i < t_i$;

$\Delta = \underset{i}{Max}(\Delta t_i)$. 但シ $a < b$ トス。

$a > b$ 又ハ $a = b$ ノトキハ

$$\int_a^b = -\int_b^a$$

ニヨッテ定義スル。

積分ノ存在ハ，独立変数ガ閉區間 $[a, b]$ ニ属シ、從ッテ $\varphi(t)$ ガ $[a, b]$ デ一様ニ連続ナルコト、及ビ φ ノ属スル空間 $\mathfrak{L}$ ガ完全ナ距離空間ナルトキニ Cauchy ノ收斂條件ガ成立スルコトニヨッテ証明サレル。（以後常ニ $\mathfrak{L}$ ハ完全ト假定スル！）

$\varphi(t)$ ガ連続ナラバ容易ニ

$$\frac{d}{ds}\int_a^s \varphi(t)\,dt = \varphi(s)$$

之レカラ前ノ $\frac{d\varphi}{dt} = 0$ ナラバ $\varphi(t)$ ニ一定トイフ定理ニヨリ、$\frac{d\varphi}{dt}$ ガ連続ナラバ、普通ノ場合ト同様ニ，

$$\int_a^b \frac{d\varphi(t)}{dt}\,dt = \varphi(b) - \varphi(a).$$

重複積分　独立変数が有限個ノ実変数ノ組合ハセヨリ成ル函数 $\varphi=\varphi(u_1, u_2, \cdots\cdots, u_k)$ ノ場合，$\varphi(u)$ が連続ナラバソノ重複積分モ、全ク初等積分学ニ於ケルトキト同様ニ定義出来ル。又重複積分ヲ単一積分ノ繰返シトシテ考ヘルコト，従ッテ又積分ノ順序ノ変更モ普通ノ場合ト全ク同様ニ出来ル．

例ヘバ

$$\int_a^b\int_{a'}^{b'}\varphi(u,v)\,du\,dv=\int_a^b\left[\int_{a'}^{b'}\varphi(u,v)\,dv\right]du$$

$$=\int_{a'}^{b'}\left[\int_a^b\varphi(u,v)\,du\right]dv.$$

$\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\right)=\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\right)$ ニツイテ　$\varphi(u,v)$ ガ實変数 (u,v) デ微分可能ナルトキ、更ニ $\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}$ ガヒデ連続微分可能ナラバ，

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)$$

証明ハ

$$\int_a^U\int_b^V\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)du\,dv=\int_a^U\left[\int_b^V\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)dv\right]du$$

$$=\varphi(U,V)-\varphi(U,b)-\varphi(a,V)+\varphi(a,b)$$

$$=\int_b^V\left[\int_a^U\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)du\right]dv.$$

故ニ

$$\frac{\partial}{\partial U}\left(\frac{\partial \varphi(U,V)}{\partial V}\right)=\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)\right]_{\substack{u=U\\ v=V.}}$$

（証明了）

一般ニ　$\dfrac{\partial}{\partial u_k}\left(\dfrac{\partial}{\partial u_{k-1}}\left(\cdots\cdots\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial u_1}\right)\cdots\cdots\right)\right)$ ガ連続ナル時ニハ之レハソノ微分ノ順序ニ無関係トナル。　従ッテ我々ハ之ヲ簡単ニ

$$\frac{\partial^k \varphi}{\partial u_1 \partial u_2 \cdots\cdots \partial u_k}$$

デ表ハス。

§3. 高階ノ微分法

前号 §1 ニ於テ定義シタ $\eta=f(\xi)$ ノ ξ_0 ニ於ケル微分商ハ，ξ ノ線状空間 $\mathfrak{L}_1$ カラ η ノ線状空間 $\mathfrak{L}_2$ ヘノ線状写像デアル。即チ

$$f_\xi(\xi_0)=\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)_{\xi_0}\in\left[\mathfrak{L}_2(\mathfrak{L}_1)\right].$$

此処デ ξ_0 ハばらめた一ニスギナイ。此ノばらめた— ξ_0 ヲ活カシテ ξ ト同ジ領域ヲ変化セシムルトキ、之レヲ元ト同ジ ξ デ表ハシ、$f_\xi(\xi)=\dfrac{d\eta}{d\xi}$ ヲバ $\eta=f(\xi)$ ノ導函数トイフ。導函数ハ又 ξ ノ函数トナル。導函数ノトル値ノ領域ハ $\left[\mathfrak{L}_2(\mathfrak{L}_1)\right]$ デアル。

$[\mathfrak{L}_2(\mathfrak{L}_1)]$ ハ又線狀空間ヲ作ル。（60号 39—40頁參照）從ッテ $f_\eta(\xi)$ ガ更ニ η ノ函数トシテノ微分商ガ定義出來ル。即チ

$$f_{\eta\eta}(\xi)=\frac{d}{d\eta}f_\eta(\xi)\ \in\ \Big[\big[\mathfrak{L}_2(\mathfrak{L}_1)\big](\mathfrak{L}_1)\Big].$$

η ハばらめた—ニスギナイ。各一定ノ η ニツイテ $f_{\eta\eta}(\xi)$ ハ $(\mathfrak{L}_1)$ カラ $[\mathfrak{L}_2(\mathfrak{L}_1)]$ ヘノ線狀寫像デアル。

以下同様ニシテ一般ノ高階ノ微分商ヲ定義スルコトガ出來ル。

高階ノ微分　一般ニ微分商ハ元ノ函数値ノ領域ヨリモ高イ階段ノ線狀空間ニ屬スル。之ニ對シ微分ハ元ノ函数値ト同ジ線狀空間ニ屬スルモノデアル。即チ

$$(\xi_1\in\mathfrak{L}_1)\longrightarrow\big[d\xi=f_\eta(\xi)\,\xi_1\ \in\ \mathfrak{L}_2\big]$$

同様ニ二階ノ微分商ニ於テモ

$$(\xi_1\in\mathfrak{L}_1)\longrightarrow\Big\{f_{\eta\eta}(\xi)\cdot\xi_1\ \in\ \big[\mathfrak{L}_2(\mathfrak{L}_1)\big]\Big\},$$

故ニ更ニ

$$(\xi_2\in\mathfrak{L}_1)\longrightarrow\Big\{\ \big[f_{\eta\eta}(\xi)\cdot\xi_1\big]\cdot\xi_2\ \in\ \mathfrak{L}_2\Big\}.$$

次ノコトハ微分ノ定義カラ容易ニ証明出來ル。

$$\frac{d}{d\eta}\Big\{f_\eta(\xi)\cdot\xi_1\Big\}=f_{\eta\eta}(\xi)\cdot\xi_1,$$

故ニ

$$\frac{d}{d\eta}\Big\{f_\eta(\xi)\cdot\xi_1\Big\}\cdot\xi_2=\Big[f_{\eta\eta}(\xi)\cdot\xi_1\Big]\cdot\xi_2.$$

但シ ξ_1, ξ_2 ハ ξ トハ独立ナ $\mathfrak{L}_1$ ノ要素（任意）デアル。

$$\boxed{\left[f_{\xi\xi}(\xi)\cdot\xi_1\right]\cdot\xi_2=\left[f_{\xi\xi}(\xi)\cdot\xi_2\right]\cdot\xi_1 \text{ ニ就テ}}$$

普通ノ微分法ニ於ケル法則

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

ニ相當スルモノガ

$$\left[f_{\xi\xi}(\xi)\cdot\xi_1\right]\cdot\xi_2=\left[f_{\xi\xi}(\xi)\cdot\xi_2\right]\cdot\xi_1$$

デアル（ξ_1, ξ_2 ニツイテ對稱）。但シ $f_{\xi\xi}(\xi)$ ガ ξ ニツイテ連続デアルト假定スル。之ハ有限次元ノ場合ニ於イテハ、行列

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial y}{\partial x_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial y}{\partial x_n} \\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n}\frac{\partial y}{\partial x_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial}{\partial x_n}\frac{\partial y}{\partial x_n} \end{pmatrix} = f_{\xi\xi}(\xi) \quad [y=f(\xi)]$$

ガ對稱ナルコトヲ意味スルモノデアル。

証明. $y=f(\xi)$ ニ於テ

$$\xi(u,v)=\xi_0+u\xi_1+v\xi_2$$

(u,v) ハ實変數トスル。シカラバ

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)=\frac{d}{d\xi}\left[f_\xi(\xi)\cdot\xi_1\right]\xi_2=\left[f_{\xi\xi}(\xi)\cdot\xi_1\right]\cdot\xi_2,$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)=\left[f_{\xi\xi}(\xi)\cdot\xi_2\right]\xi_1.$$

所が §2 ノ結果ニヨリ

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right).$$

故ニ $\left[f_{\xi\xi}(\xi)\cdot\xi_1\right]\cdot\xi_2=\left[f_{\xi\xi}(\xi)\cdot\xi_2\right]\xi_1$

——（証明了）——

次ニ $f(\xi,\eta)$ ガ (ξ,η) ニツキ微分可能デ $f_{\xi\eta}(\xi,\eta)$ ガ連続ナル時ニモ、同様ニシテ

$$\left[f_{\xi\eta}(\xi,\eta)\,d\xi\right]d\eta=\left[f_{\eta\xi}(\xi,\eta)\,d\eta\right]d\xi$$

ガ証明出来ル。又一般ノ高階ノ微分ニツイテモ同様ノコトガ成立スル。

ウカウカシテヰル内ニ又紙上談話會ノ原稿ノ締切リニナツテシマツタ、平凡ナ事バカリデ面目ナイ。此ノ次ハ解析函數ヲ考察スルコトニシヨウ。