



Title	有限個領域ニ於ケル函数ニ就イテ
Author(s)	伊藤, 誠
Citation	全国紙上数学談話会. 1935, 62, p. 1-7
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74150
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

228. 有限個領域=於ケル函数=就イテ

伊藤 誠 (御影師範)

① 今 $\{0, 1\}$ ナル 2 個ノ整數カラナル領域=於イテ次ノ表=ヨツテ定メラレルニ変數ノ函数 $\varphi(x_1, x_2)$ ヲ考ヘル。

		$\xrightarrow{\quad} x_2$	
	φ	0	1
$\downarrow x_1$	0	1	0
	1	0	0

然ルトキハ此ノ領域=於ケル任意ノ変數ノ函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ハ上ノ函数ヲ何回カ *iterieren* スルコト=ヨツテ *erzeugen* スルコトが出来ル。

何故ナラバ先ヅ 1 変數ノ函数ハ明ラカニ $2^2 = 4$ 個ダケアリ。之ハ

1. $\varphi(x, x) = \sigma(x)$
2. $\varphi(\varphi(x, x), \varphi(x, x)) = \sigma(\sigma(x)) = \overline{\sigma}(x)$
3. $\varphi(x, \varphi(x, x)) = \varphi(x, \sigma(x)) \equiv 0$
4. $\varphi(\varphi(x, \varphi(x, x)), \varphi(x, \varphi(x, x))) = \sigma(\varphi(x, \sigma(x))) \equiv 1$

=ヨツテ表ハサレル。但シコトニ $\sigma(x)$, 及び $\overline{\sigma}(x)$ ハ

$$\begin{cases} \sigma(0) = 1 \\ \sigma(1) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \overline{\sigma}(0) = 0 \\ \overline{\sigma}(1) = 1 \end{cases}$$

ナル性質ヲ有スル。

次ニ $(n-1)$ 変數マデノ函数ハスベテ $\varphi(x_1, x_2)$ ノ

Iteration = ヨツテ erzeugen スルコトが出来ヌモ
 ノト假定スル。今任意ノ γ 変数函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_\gamma)$ ヲ
 取レバ、之ハ次ノ如ク書キ表ハセリ:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_\gamma) = f(0, x_2, \dots, x_\gamma) \cdot \sigma(x_1) \\
+ f(1, x_2, \dots, x_\gamma) \cdot \bar{\sigma}(x_1) \dots\dots\dots (1)$$

因ツテ

$$\begin{cases} \psi_1(x_1, x_2) = \varphi[\varphi(x_1, x_2), \varphi(x_1, x_2)] = \sigma(\varphi(x_1, x_2)) \\ \psi_2(x_1, x_2) = \varphi[\varphi(x_1, x_1), \varphi(x_2, x_2)] = \sigma(\sigma(x_1), \sigma(x_2)) \end{cases}$$

ナルニツノ函数ヲ考ヘルト、此ノ領域=於テハ

$$\begin{cases} \psi_1(x_1, x_2) = x_1 \times x_2 \\ \psi_2(x_1, x_2) = x_1 + x_2 & x_1 = 0 \text{ od. } x_2 = 0 \text{ ノトキ} \\ = 1, & x_1 = x_2 = 1 \text{ ノトキ} \end{cases}$$

トナル故、(1)ノ右辺ハ

$$\psi_2\left[\psi_1(f(0, x_2, \dots, x_\gamma), \sigma(x_1)), \right. \\ \left. \psi_1(f(1, x_2, \dots, x_\gamma), \bar{\sigma}(x_1))\right]$$

ト書クコトが出来ル。コゝニ $\sigma, \bar{\sigma}, \psi_1, \psi_2$ ハ既ニ示シタ
 如ク φ ノ Iteration = ヨツテ定義サレ、又 $f(0, x_2, \dots, x_\gamma)$ 及ビ $f(1, x_2, \dots, x_\gamma)$ ハ何レモ $(\gamma-1)$ 変数
 ノ函数デアルカラ、假定=ヨツテ $\varphi(x_1, x_2)$ ノ Iteration
 = ヨツテ erzeugen サレ得ル。從ツテ上式即チ $f(x_1, x_2, \dots, x_\gamma)$ モ亦 φ =ヨツテ erzeugen サレルコトナル。

以上=ヨツテ此ノ領域=於ケル悉エル函数ハ只一ツ、2
 変数函数 $\varphi(x_1, x_2)$ =ヨツテ erzeugen サレルコトが

分ツタ。

$\varphi(x_1, x_2)$ の代り = 次ノ函数 $\varphi'(x_1, x_2)$ を取ツテモ矢張り同様ノコトが云へル:

		$\longrightarrow x_2$	
	φ'	0	1
$\downarrow x_1$	0	1	1
	1	1	0

何故ナラバ $\varphi(x_1, x_2)$ は $\varphi'(x_1, x_2) = \varphi'(x_1, x_2)$ ニヨツテ次ノ如ク表ハセルカラ:

$$\varphi(x_1, x_2) = \varphi'[\varphi'(\varphi'(x_1, x_1), \varphi'(x_2, x_2)), \varphi'(\varphi'(x_1, x_1), \varphi'(x_2, x_2))].$$

扱テ φ, φ' 以外 = ハ最早々斯様 = 總ベテノ *Funktionen* を *erzeugen* スル *Basisfunktion* ハナイデアヲシカ? 答ハ然リデアアル。証明ハ次ノ様デアアル。

2変数函数ヲ $f(x_1, x_2)$ トスルトキ,

1°) $f(0, 0) = 0$ ナル如キ f ハ *Basis* トナリ得ナイ。何故ナラ、カヤヲナ *Funktion* を何回 *iterieren* シテモ $x=1$ ナル函数ハ得ラレナイカラ。

2°) $f(1, 1) = 1$ ナル如キ f モ亦 *Basis* トナリ得ナイ。

何故ナラ、之ニヨツテ $x=0$ ナル函数ハ得ラレナイ故。

3°) $f(x_1, 0) = 1, f(x_1, 1) = 0$ ナル如キ f モ亦不可。

何故ナラ此ノトキハ $f(x_1, x_2) = 1 - x_2$ トナリ、之ヲ *iterieren* スルコト = ヨツテ生ズル 1 変数函数ハ又ハ $1 - x$ ガケデ $x = 1$, 又ハ $x = 0$ ナル函数ハ得ラレナイ。

4°) $f(0, x_2) = 1$, $f(1, x_2) = 0$ ナル如キナモマタ
3°) ト同様 = Basis トナリ得ナイ。

1°), 2°), 3°), 4°) 以外ノ函数デ常数トナラナイモノハ
先 = 擧ゲタ φ 及ビ φ' ノミデアル。

[2] 上述ニ於イテハ便宜上 $\{0, 1\}$ ナル二整数カラナル
領域 = ツイテ考ヘタガ、 $\{\alpha_0, \alpha_1\}$ ナル任意ノ2元素カラ
ナル領域 = ツイテ考ヘテモ結果ハ全ク同様デアル。

上ノ所論ヲ任意ノ $n+1$ 個ノ Elemente $\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ カラナル所謂 *n-zahlig* ナ領域
= 拡張スルコトハ出来ナイデアラウカ?

之 = 就イテ分ツタ事柄ダケヲ述ベテミル。

便宜上前ト同様 = $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ ヲ $\{0, 1, 2, \dots, n\}$ ナル整数デ代表サセルコト = スル。先ヅコノ領域
= 於ケル任意ノ 1 変数ノ函数 $f(x)$ ヲ取ツテ考ヘルト、之
ハ次ノ如ク書き表ハセル:

$$f(x) = \sum_{\lambda=0}^n f(\lambda) \cdot \sigma(x, \lambda) \dots\dots\dots (1)$$

但シコノ $\sigma(x, \lambda)$ ナル函数ハ

$$\begin{cases} x = \lambda & \text{ナルトキ} & 1 \\ x \neq \lambda & \text{''} & 0 \end{cases}$$

ナリ変数ノ函数ヲ表ハスモノトスル。

今特ニ

$$\begin{cases} \psi_1(x_1, 0) = 0 \\ \psi_1(x_1, 1) = x_1 \end{cases} \quad \begin{cases} \psi_2(x_1, 0) = x_1 \\ \psi_2(0, x_2) = x_2 \end{cases}$$

ナリ性質ヲ有スルニツノ函数 $\psi_1(x_1, x_2)$, $\psi_2(x_1, x_2)$ ヲ
考ヘルト

$$\begin{cases} \psi_1(x_1, x_2) = x_1 \times x_2 & x_2 = 0 \text{ od. } 1 \text{ ノ トキ} \\ \psi_2(x_1, x_2) = x_1 + x_2 & x_1 = 0 \text{ od. } x_2 = 0 \text{ ノ トキ} \end{cases}$$

ナル故、(1)ノ右辺ハ ψ_1, ψ_2 並ビ $x = f(\lambda) = konst.$,
及ビ $\sigma(x, \lambda)$, $(\lambda = 0, 1, 2, \dots, n)$ ナリ変数函数ニ
ヨツテ書キ表ハサレル。而モ此ノ際(1)ノ右辺ヨリ余ルヤウ
ニ ψ_1 ハ $(n+1)$ 回, ψ_2 ハ n 回用ヒラレル。

次ニ任意ノ r 変数函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_r)$ ヲ取ル
ト、前同様

$$f(x_1, x_2, \dots, x_r) = \sum_{\lambda=0}^n f(\lambda, x_2, \dots, x_r) \cdot \sigma(x_1, \lambda)$$

ト書クコトが出来ル。從ツテ $(r-1)$ 変数函数マデハ ψ_1, ψ_2
及ビ $x = k$, $(k = 0, 1, 2, \dots, n)$, $\sigma(x, \lambda)$, $(\lambda = 0, 1, 2, \dots, n)$ ナリ変数函数ニヨツテ悉ク *erzeugen*
スルコトが出来ルト假定スレバ, r 変数函数ノ場合ニモ矢張り然ルコトが言ヘル。而シテコノ場合ニハ ψ_1 ハ $(n+1)^r$
回, ψ_2 ハ n^r 回, σ ハ $(n+1)^r$ 回 $x = k$, $(k = 0, 1, 2, \dots, n)$ ハ各 1 回宛用ヒラレルコトが *Induktion* =

ヨツテ容易 = 合ル。

上述 = ヨツテ一般 = 次ノ定理が得ラレル:

[定理] $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ ナル $\nu = n+1$ 個ノ

Elemente カラナル所謂 ν -zähligノ Bereich =
於イテハ、任意ノ函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ハ上述ノ如
キニツ、2 変数函数 $\psi_1(x_1, x_2)$, $\psi_2(x_1, x_2)$ 及ビ $x = k$
($k = 0, 1, 2, \dots, n$), $\phi(x, \lambda)$, ($\lambda = 0, 1, 2, \dots,$
 $\dots, n$) ナル $2(n+1) = 2\nu$ 個ノ 1 変数函数 = ヨツテ er-
zeugen サレル。而シテコノ際 ψ_1 ハ ν^r 回, ψ_2 ハ
($\nu-1$) r 回, ϕ ハ ν^r 回, $x = k$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n$)
ハ各 1 回宛用フレバ充分デアル。

此ノ定理ノ上ニ述ベタ証明ハ神戸商大ノ水谷一雄氏カラ
教ヘテ頂イタ方針ニ從ツテ行ツタモノデアル。更ニ残サレタ
問題ハ

[第一] 2-zähligノ領域ニ於ケルマウニ, ψ_1, ψ_2 及
ビ悉ユル 1 変数函数ヲ只一ツノ 2 変数函数ニヨツテ erzeu-
gen スルコトが出来ナイカ? 若シ出来ルトスレバ幾通り
左様ナ函数が存在スルカ?

[第二] 上ノ所論ヲ abzählbar unendlich ナハ
連続領域ニ拡張シタラ如何ナルカ?

ト云フコトデアル。第一ノ問題ノ中『只一ツノ 2 変数函数
 $\varphi(x_1, x_2)$ トシテ次ノゴトキモノヲ擇ベバ、之レニヨツテ
幾テノ 1 変数函数が erzeugen サレルコト』ハ角谷、水

谷兩氏が置換群ノ考ヘヲ用ヒテ解決サレタ。

$\longrightarrow x_2$

	0	1	2	3	4	-----	$n-2$	$n-1$	n
0	1							$n-1$	n
1	1	2							n
2	1	0	3						
3		1	2	4					
4			2	3	5				
				3	4				
					4				
$n-2$							$n-1$		
$n-1$							$n-2$	n	
n							$n-2$	$n-1$	0

$\downarrow x_1$

猶未解決ノ点ニ就イテ諸賢ノ御教示ヲ得レバ幸ヒデアル。

— (1935, 10, 10) —