



Title	或種ノ積分方程式ニ就イテ（Ⅱ）
Author(s)	泉， 信一； 北川， 敏男
Citation	全国紙上数学談話会． 1935， 62， p. 11-19
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74152
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

230. 或種ノ積分方程式ニ就イテ(II)

泉 信一 (東北大)

北川 敏男 (阪大)

§3. 積分方程式 $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)f(t)dt$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)f(t)dt \cdots \cdots (1)$$

ニ於イテ、任意ノ整数 n ニ對シテ常ニ

$$\int_{-\infty}^{\infty} |K(t)| t^n dt$$

が存在シ、且ツ

$$\sqrt[n]{\int_{-\infty}^{\infty} |K(t)| t^n dt} = O(1) \dots\dots\dots (2)$$

ナリト假定スル。

然ルトキ、(1)ヲミタス有階次數 *finite order*、
整函数 $f(x)$ ヲ求メヨリ、

コノトキ明カニ、(1)ノ右辺ノ積分ハ存在スル。

コノタメニハ、

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha|t|^k} |K(t)| dt$$

が任意ノ $\alpha, k > 0$ ニ對シテ存在スルコトヲ云フテオケバヨ
ロシイ。

$$\begin{aligned} \int_{-T}^{T'} e^{\alpha|t|^k} |K(t)| dt &= \int_{-T}^{T'} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha|t|^k)^n}{n!} |K(t)| dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \int_{-T}^{T'} |t|^{kn} |K(t)| dt \end{aligned}$$

蓋シ、

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(|t|^k \alpha)^n}{n!} \quad \text{ハ} \quad -T \leq t \leq T' = T \text{ノ様ニ}$$

$e^{\alpha|t|^k}$ ニ收斂スルカラ、積分ヲ中ヘ入レルコトが許サレル。

尚 k ヲ固定スルトキ

$$\sqrt[n]{\int_{-\infty}^{\infty} |t|^{kn} |K(t)| dt} = O(1)$$

ソレ故

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} |t|^{kn} |K(t)| dt$$

ハ存在スル。カクシテ

$$\lim_{T, T' \rightarrow \infty} \int_{-T}^{T'} e^{\alpha |t|^k} |K(t)| dt$$

ハ存在スル。

從ツテ

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t) f(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} K(t) \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t)^n}{n!} f^{(n)}(x) \right\} dt \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

次ニ (3) ノ右辺ノ積分ノ中ノ級数ハ一様收斂ダカラ、任意ノ $T > 0$ 及ビ $T' > 0$ ニ對シテ

$$\begin{aligned} &\int_{-T}^{T'} \left\{ K(t) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t)^n}{n!} f^{(n)}(x) \right\} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} \int_{-T}^{T'} K(t) (-t)^n dt \end{aligned}$$

又 $\int_{-\infty}^{\infty} K(t) (-t)^n dt$ ハ各 n ニツイテ存在シ、更ニ、

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} K_n \quad \text{ハ} \quad |K_n| \leq K \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

トナル様ニ任意ノ $\{K_n\}$ ニツイテ一様收斂ヲアルカラ

$$\lim_{T, T' \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} \int_{-T}^{T'} K(t) (-t)^n dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} K(t) (-t)^n dt$$

依ッテ (3) カラ

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} K(t) (-t)^n dt$$

故ニ

$$a_n = \int_{-\infty}^{\infty} K(t) (-t)^n dt$$

トオキ

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} f^{(n)}(x) \dots\dots\dots (6)$$

之レ無限次ノ微分方程式デアル。(6) = Valiron, 定理ヲ

應用スルタメニ (6) ノ母函数

$$g(z) = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$$

ノ order 及ビ type ヲ調べテ見ヨシ。 $g(z)$ ノ order
ヲ ρ トスルトキ

$$\rho = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n \lg n}{\lg \left| \frac{n!}{a_n} \right|}$$

$$= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n \lg n}{n \lg n - \lg |a_n| + o(n \lg n)}$$

然ルニ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lg |a_n|}{n \lg n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \lg O(1)}{n \lg n} = 0$$

次ニ (4) カラ

$$\begin{aligned} n \sqrt[n]{\left| \frac{a_n}{n!} \right|} &= \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!} \left| \int_{-\infty}^{\infty} K(t) (-t)^n dt \right|} \\ &= \sqrt[n]{\sqrt{n} e^n O(1)} < \infty \end{aligned}$$

故ニ、 $g(2)$ ハ maximal type ニナラナイ。

依ツテ Valiron ノ定理ガ應用出來ル。

乃チ次ノ定理ガ得ラレル。

定理3. $K(t)$ ガ $(-\infty, \infty)$ デ定義サレ、任意ノ整数 n ニツイテ

$$\int_{-\infty}^{\infty} |K(t)| t^n dt$$

ガ存在シ、且ツ

$$\sqrt[n]{\int_{-\infty}^{\infty} |K(t)| t^n dt} = O(1)$$

ナルトキニハ、

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t) f(t) dt$$

ヲミタス有限次数ノ整函数 $f(x)$ ハ

$$f(x) = \sum_n p_n(x) e^{\lambda_n x}$$

ト書クコトが出来ル。コト = λ_n ハ

$$0 = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} K(t) (-t)^n dt$$

ノ零点デ $P_n(x)$ ハ λ_n multiplicity μ_n ヨリ低い
次数ノ多項式デアル。

但シ、コト =
$$\frac{\mu_n}{\lambda_n + \mu_n} \rightarrow 0 \quad \text{ナリトスル。}$$

3. 定理3 = 於イテ $K(x)$ = 関スル條件ヲ弱クシ、且ツ
 $f(x)$ = 関スル條件ヲ強クシヨウ。

今 $K(x)$ ハ任意ノ有限區間デ積分可能デ、且ツ

$$K(x) = O(e^{-c|x|})$$

コト = C ハ定数デアル。

$f(x)$ ハ整函数デアリ且ツ

$$\lim \sqrt[n]{|f^{(n)}(x)|} \leq C' < C$$

トスル。

然ルトキ

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t) f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} K(t) f(x-t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} K(t) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t)^n}{n!} f^{(n)}(x) \right) dt \end{aligned}$$

然ルニ

$$\left| K(t) \sum_{n=0}^m \frac{(-t)^n}{n!} f^{(n)}(x) \right| \leq |K(t)| e^{c|t|} \cdot e^{-c|t|} \sum_{n=0}^m \frac{(C'|t|)^n}{n!}$$

右辺ノ第一因數ハ假定カラ有界デ、第二因數ハ $(-\infty, \infty)$
 デ積分可能ナ函数 $e^{-(c-c')|t|}$ ヨリトサイ、故 = Lebesgue
 ノ定理カラ

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} K(t) (-t)^n dt$$

故 =

$$a_n = \int_{-\infty}^{\infty} K(t) (-t)^n dt$$

トオクトキ、無限次ノ方程式

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} f^{(n)}(x)$$

ヲ得ル。

4. 然ル =

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n!}} &= \sqrt[n]{\frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} |K(t) t^n| dt} \\ &= \sqrt[n]{\frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} |K(t)| e^{c|t|} \cdot e^{-c|t|} |t|^n dt} \\ &= \sqrt[n]{\frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-c|t|} |t|^n dt} (1 + o(1)) \\ &= \frac{1}{c} (1 + o(1)) \end{aligned}$$

故 = ----- , 結果ガ應用出來ル。

$$1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} K(t) (-t)^n dt = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} K(t) (-tz)^n dt$$

$$= 1 - \int_{-\infty}^{\infty} K(t) e^{-tz} dt$$

右辺ノ $|R(z)| \leq C' =$ オケル零点ノ数ハ有限デア¹⁾ル。

故ニ *Dairs* ノ定理カラ次ノ定理ガエラレ^ル。

定理4. $K(x)$ 及ビ $f(x)$ ハ $(-\infty, \infty)$ デ定義セラレテ
ヲ^ル。

$K(x)$ ハ任意ノ有限區間デ連続デ、且ツ

$$K(x) = O(e^{-c|x|})$$

トナルヤウナ $C > 0$ ガアルトスル、又 $f(x)$ ハ整函数デ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sqrt{|f^{(n)}(x)|} \leq C' < C$$

トナル様ナ $C' > 0$ ガ存在スル^{トスル}。

然^ルトキ、 $f(x)$ ガ

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t) f(t) dt$$

ヲ満足ス^ルナラバ

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^N P_{\nu}(x) e^{\lambda_{\nu} x}$$

コ^ノ λ_{ν} ハ

$$1 - \int_{-\infty}^{\infty} K(x) e^{-zx} dx = 0$$

1) Paley-Wiener, loc. cit., Chapit., IV.

ノ根ノヲチ $|\lambda_n| < C'$ ナルモノトシ, $P_n(x)$ ハ λ_n ノ *multiplicity* ヨリ低次ノ多項式デアル。

注意: 定理 = オイテ條件 (7) ノ代リ =

$$K(x) = O(P(x))$$

ヲオキカヘルコトが出来ル、コノ $P(x)$ ハ *pos., even* デ
且ツ

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(x) e^{c|x|} dx < +\infty$$

トナルトスル。尚 $K(x)$ ハ有限個ノ不連続点ヲモツモ差支
ヘハナイ。