



Title	單葉函數二就イテ
Author(s)	南, 右内
Citation	全国紙上数学談話会. 1935, 62, p. 19-23
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74153
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

231. 單葉函數ニ就イテ

南 右 内 (札幌一中)

任意ノ凸領域 D ニ於テ定義セラレタ函数

$$f(z) = \frac{a}{z} + g(z)$$

ノ單葉性ニ就イテ考ヘル、但シ $g(z)$ ハ D ニ於イテ正則ナ函数トス。

次ニ述ベル定理ハ特別ナル場合ニハ佐藤氏 (系 I 参照) ノ結果ヲ含ミ、能代氏ノ定理 ($a=0$ ナルトキ) ノ拡張ニモナツテキル。

以下ノ論ニ於テ使フ扇形ナル言葉ノ意味ハ次式ヲ満足ス

ル z ノ範圍ト定義シテ置ク。

$$\left. \begin{array}{l} \theta_1 \leq \arg z \leq \theta_2 \\ r_1 \leq |z| \leq r_2 \end{array} \right\}$$

但シコノ扇形ノ中ニハ

$$r_1 = 0, r_2 = \infty, r_1 = r_2$$

等ノ場合モ含マシメル。

定理. 凸領域 D ニ於

テ $g(z)$ ハ正則トシ

$f(z) = \frac{a}{z} + g(z)$ ナル函数ヲ考ヘル、コレガ次ノ條件ヲ満足スルトスル。

1°. $w = g'(z)$ ($z \in D$) ハ w -plane, 凸領域 α , 内部ニアル。

2°. z -plane ニ於テ扇形 A ガ $w = \frac{a}{z^2}$ ニヨリ w -plane, 扇形 β ニ寫像サレテ β . $\alpha = 0$

然ルトキハ $f(z)$ ハ $A \cdot D$ ニ於テ單葉ナル。

(注意) β ハ A カラ初等幾何学的ニ帯ニ簡單ニ作圖出來テ矢張り扇形トナル。

証明. $A \cdot D$ ニ任意ノ相異ナル二点 z_1, z_2 ヲ取レバ z_1, z_2 ヲ結ブ線ハ D ノ中ニ入ッテ來ル。

従ツテ

$$\begin{aligned} f(z_1) - f(z_2) &= \frac{a}{z_1} - \frac{a}{z_2} + g(z_1) - g(z_2) \\ &= \frac{a}{z_1 z_2} (z_2 - z_1) - \int_{z_1}^{z_2} g'(z) dz \end{aligned}$$

$$= \left[\frac{a}{z_1 z_2} - \frac{1}{z_2 - z_1} \int_{z_1}^{z_2} g'(z) dz \right] (z_2 - z_1)$$

然 $\nu = z_1, z_2 \in A$ $\rightarrow \nu$ 故, 扇形ノ性質 = $\exists \eta \frac{a}{z_1 z_2} \in \mathcal{B}$,
又 $g'(z) \in \mathcal{O}$ $\rightarrow \nu$ 故, 複素変数 = 於 ν $Weierstrass$
ノ平均値ノ定理 = $\exists \eta$

$$\frac{1}{z_2 - z_1} \int_{z_1}^{z_2} g'(z) dz \in \mathcal{O}$$

$\rightarrow \nu$. 而 $\in \mathcal{B}$. $\mathcal{O} = 0$ $\rightarrow \nu$ 故

$$\frac{a}{z_1 z_2} \neq \frac{1}{z_2 - z_1} \int_{z_1}^{z_2} g'(z) dz$$

他方デ $z_2 - z_1 \neq 0$ $\rightarrow \nu$ 故

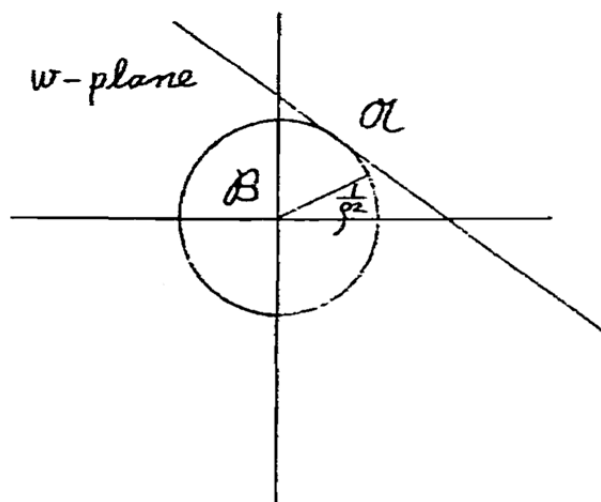
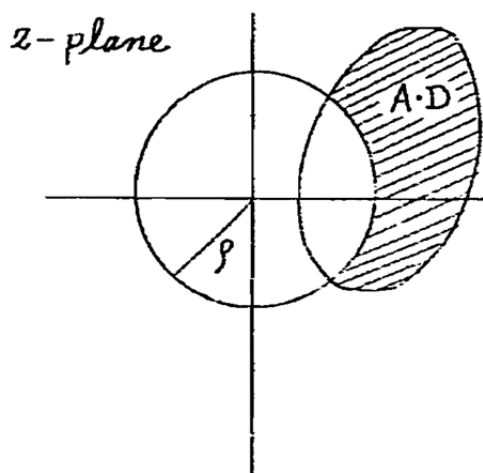
$$f(z_1) - f(z_2) = \left[\frac{a}{z_1 z_2} - \frac{1}{z_2 - z_1} \int_{z_1}^{z_2} g'(z) dz \right] (z_2 - z_1) \neq 0$$

即チ $f(z)$ ハ A.D = 於 ν 單葉デアル。

系1 前定理 = 於 ν $\alpha = 1$ ナル場合ヲ考ヘル。

A: $|z| > \rho$, $0 \leq \arg z < 2\pi$ $\rightarrow \nu$ ナル。

B: $|w| < \frac{1}{\rho^2}$ $\rightarrow \nu$ 。



故 = α が w -plane = 於イテ原点ヲ中心半径 $\frac{1}{\rho^2}$ ノ
外 = マル凸領域ナラバ良イコト = ナル (即チ α がコノ円ノ
切線ノ円ト反對側 = アレバヨイ)

従ッテ次ノ定理が得ラレル。

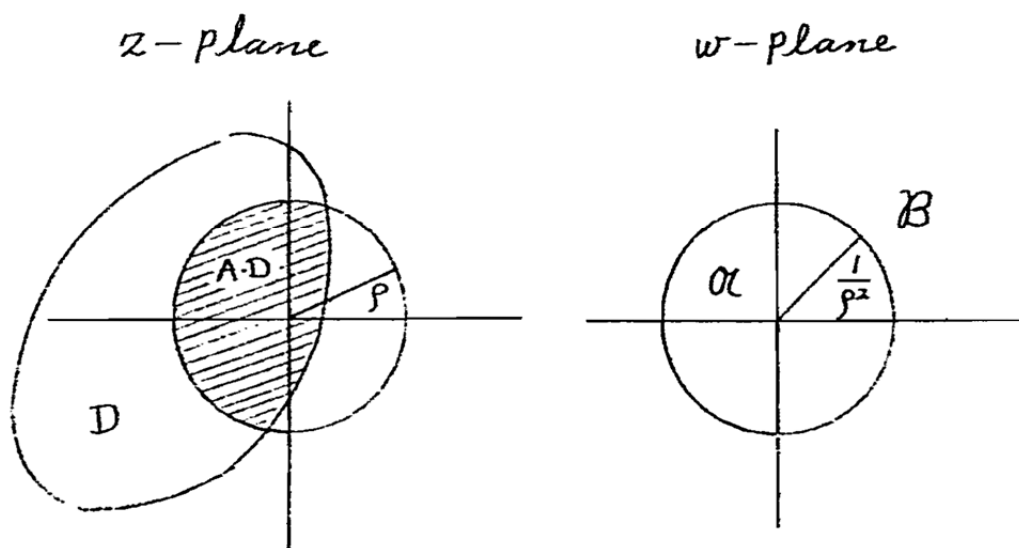
“ $f(z) = \frac{1}{z} + g(z)$; $g(z)$ ハ D デ正則; ナル函数
ヲ D = 於イテ考ヘル, D = 於イテ $R[e^{i\theta} g'(z)] > \frac{1}{\rho^2}$
ナラバ $f(z)$ ハ D = 含マレル原点ヲ中心半径 ρ ノ円外デ單
葉ナリ ”

即チ佐藤徳意氏 (學士院紀事 Vol. XI, NO. 6, 第212
頁参照) が前 = 得ラレタ定理トナル。

系2. 系1ノ場合ト同様 $\alpha = 1$ トスル

A; $|z| < \rho$ トスレバ

B; $|w| > \frac{1}{\rho^2}$ トナル。



故 = α ハ w -plane / 原点ヲ中心半径 $\frac{1}{\rho^2}$ ノ円ノ内
部ナラバ良イコト = ナル。従ッテ $\frac{1}{\rho^2} = M$ トヲケバ次ノ定理
が得ラレル。

“凸領域 $D =$ 於イテ $g(z)$ が正則トシ $f(z) = \frac{1}{z} + g(z)$
 が考フレバ若シ $D =$ 於テ $|g'(z)| < M$ ナラバ $f(z)$ は
 $|z| < \frac{1}{\sqrt{M}}$ デ單葉ナリ”

系3. 本定理 $=$ 於テ $\alpha = 0$ ナル場合ヲ考ヘル.

A; z -plane 全体トスレバ

B; $w=0$ 一点トナル.

從ツテ α へ原点ヲ通ル直線ノ一方ノ側 $=$ アレバ良イコト $=$
 ナル故 $=$ 次ノ定理が得テレル.

“ $f(z)$ へ凸領域 $D =$ 於テ正則トス、若シ $D =$ 於イテ
 $R[e^{i\theta} f'(z)] > 0$ ナラバ $f(z)$ へ $D =$ 於テ單葉ナリ”

之レ能代氏ノ定理 [北海道帝國大學理學部紀要 Ser. I.
 Vol. II, 第151頁] デアル。 以上

—— 1935, 10, 10 ——