OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	一階常微分方程式ノ特異点ニ就テ
Author(s)	福原, 満洲雄
Citation	全国紙上数学談話会. 1935, 63, p. 3-10
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74159
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

237. 一階常微分方程式ノ特異点ニ就テ

福原満洲雄（北大）

§1. 前回ノ續キトシテ

(A) $$x\frac{dy}{dx}=\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$$

ニ於テ $P(x,y)$, $Q(x,y)$ ガ次ノ形ニ書ケル場合ヲ考ヘヨウ。

$$P(x,y)=P_0(y)+xP_1(x,y)$$

$$Q(x,y)=Q_0(y)+xQ_1(x,y)$$

$$P_0(y)=\lambda y^p+\cdots\cdots$$

$$Q_0(y)=y^{p-1}+\cdots\cdots$$

展開式ニ関スル假定ハ例ノ通リデヨイノデアルガ記号ガゴタ

ゴタシテ來ルカラ簡單ニ $P_0(y)$, $Q_0(y)$ ハ $y=0$ デ，$P_1(x,y)$, $Q_1(x,y)$ ハ $x=y=0$ デ正則ト假定シテ置ク．併シ必要ナノハ正則性デハナク近似的ノ性質デアルコトハ証明カラ分ル。$p=1$ ナラバ前回調ベタ場合ニナルカラ，ココデハ $p>1$ トスル。

§2. $P_1(0,0)\neq a$ ナラバ (A)ヲ形式的ニ滿足スルヤウニ

$$(\alpha)\qquad y\sim x^{\frac{1}{p}}\left\{\alpha_0+\alpha_1 x^{\frac{1}{p}}+\cdots\cdots+\alpha_j x^{\frac{j}{p}}+\cdots\cdots\right\}$$

ノ係數ヲキメル。$\lambda\neq\frac{1}{p}$ ナラバ α_0 ハ

$$\left(\frac{1}{p}-\lambda\right)\alpha_0^{\,p}=a$$

カラキマル、故ニソノ取リ方ハ p 通リアル。λp^2 が p ヨリ大キナ整數デナケレバ $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots$ ハ常數トシテ（α_0 ノ値ヲ一度キメテ了ヘバ）唯一通リニキマル、λp^2 が p ヨリ大キナ整數ナラバ一般ニ $\log x$ が現ハレル。何レニシテモ

$$y=x^{\frac{1}{p}}(\alpha_0+z)$$

ト置ケバ z が滿足スル方程式ハ

$$(B)\qquad x\frac{dz}{dx}=\left(\lambda-\frac{1}{p}\right)z+\cdots\cdots$$

ナル形ヲ持ツ、コヽニ書カレテナイ部分ハ $x^{\frac{1}{p}}$, z ノ冪級數デ，ドノ項モ $x^{\frac{1}{p}}$ 又ハ z^2 ヲ因子ニ含ム。從ッテ前二回ノ結果ヲ利用スルコトが出來、正ノ數 ε, δ が十分ニ小サイ

トキ

$$0<x\leqq\delta,\quad |yx^{-\frac{1}{p}}-\alpha_0|\leqq\varepsilon$$

ナル範囲ニ於ケル(A)ノ解ノ様子ガ分ル。

§3. $y=x^{\frac{1}{p}}u$ ト置ケバ(A)ハ

$$(C)\qquad x\frac{du}{dx}=\frac{\lambda u^p+a+x^{\frac{1}{p}}(\cdots\cdots)}{u^{p-1}+x^{\frac{1}{p}}(\cdots\cdots)}-\frac{1}{p}u$$

トナル。書カレテナイ部分ハ $x^{\frac{1}{p}}$, u ノ函数ト考ヘテ $(0,0)$ デ正則デアル、故ニ $x\to 0$ ノ時(C)ノ右辺ハ

$$(C')\qquad x\frac{du}{dx}=\frac{\lambda u^p+a}{u^{p-1}}-\frac{1}{p}u$$

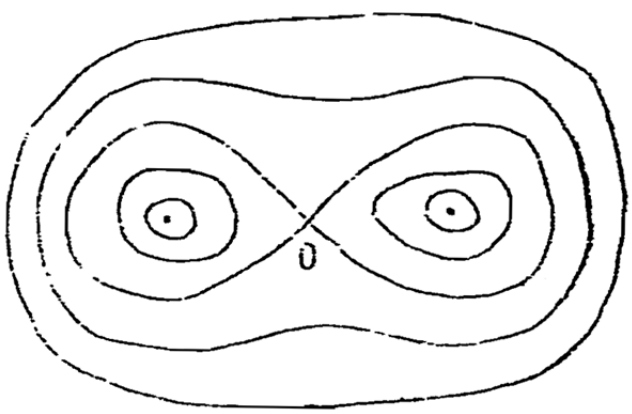
ノ右辺ニ收斂スル、(C')ヲ積分スレバ

$$u^p=\frac{pa}{1-p\lambda}+Cx^{p\lambda}\quad 1$$

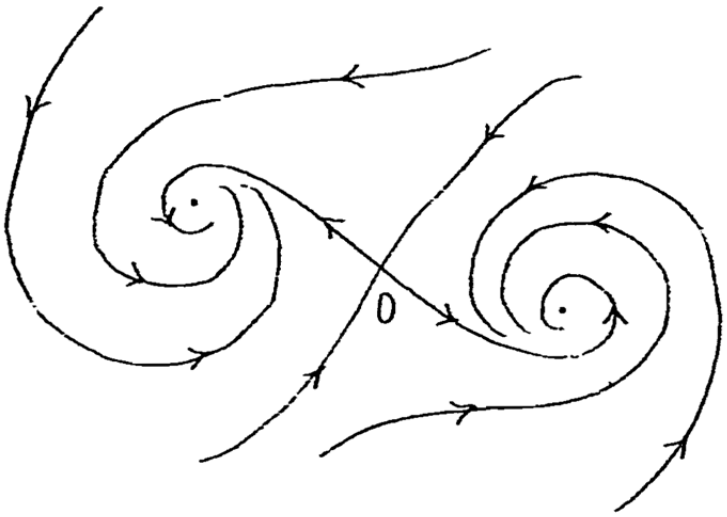
ヲ得ル。$x\to+0$ ノ時 u カ描ク曲線ハ入ノ實部 μ カ $\frac{1}{p}$ ニ等シイナラバ第1圖ノ

ヤウニ，$\mu>\frac{1}{p}$ ナラバ第2圖ノヤウニナル。

$\mu<\frac{1}{p}$ ナラバ第2圖ニ於イテ矢ノ向キヲ反對ニスレバヨイ。（圖ニ於イテハ $p=2$ トシタ）



第1圖



第２圖

§4. 今度ハ

$$0<x<\delta,\quad Mx^{\frac{1}{p}}<|y|<\Delta$$

ナル部分ヲ考ヘル、ソコデハ

$$\left|\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}-\frac{P_0(y)}{Q_0(y)}\right|<\varepsilon x^{\frac{1}{p}}$$

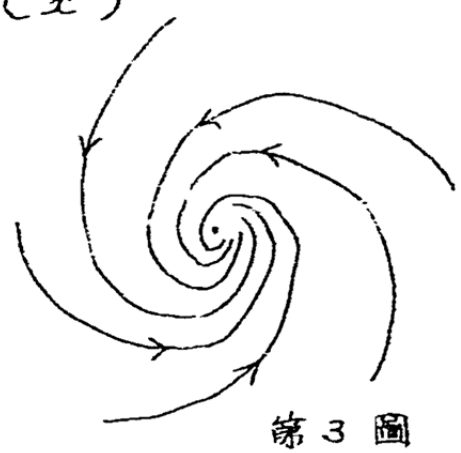
ガ成立シ、Mヲ大キク取ルコトニヨリεヲ幾ラデモ小サクスルコトガ出來ル。故ニ(A)ト

$$(A')\quad x\frac{dy}{dx}=\frac{P_0(y)}{Q_0(y)}$$

トノ比較ニナル。(A')ノ解ハ

$$y=Cx^{\lambda}+\cdots\cdots\equiv\varphi(Cx^{\lambda})$$

ナル形ニ書ケルカラ$x\to+0$ノ時yガ描ク曲線ハ$\mu>0$ナラバ第３図ノヤウニナル。$\mu<0$ナラバ矢ノ向キヲ反對ニスレバヨイ、$\mu=0$ナラバ0ヲ内部



第３圖

ニ含ム閉曲線トナル。

§5. $0<\mu<\frac{1}{p}$ ナラバ

勝手ナCノ値ニ對シテ

$$(\mathrm{I}) \qquad \lim_{x\to+0} x^{-\mu}[y-\varphi(Cx^{\lambda})]=0$$

トナルヤウナ (A) ノ解が唯一ツ存在スル、而モ

$$0<x_0<\delta, \quad Mx_0^{\frac{1}{p}}<|y(x_0)|<\Delta$$

ナル初期條件ヲ満足スル (A) ノ解ハ適當ナCノ値ニ對シテ (I) ヲ満足スル、更ニ $P(x,y)$, $Q(x,y)$ ノyニ関スル正則性カラ (I) ヲ満足スル (A) ノ解ヲCノ函数ト考ヘタトキ $0<|C|<\infty$ デ一價正則トナルコトが分ル、依ッテ其ノ解ハCノ Laurent 級数ニ展開サレル:

$$(\psi) \qquad y=\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \psi_j(x)\,C^j.$$

此ノ展開式ハ $P(x,y)$, $Q(x,y)$ が $(0,0)$ デ正則トイフ假定ノ下ニ於テハ新シイモノデハナイ、此ノ展開式ヲ導キ出ス從來ノ方法ヲ念ノタメニ述ベテ置ク。

$x=y^p\xi$ ト置ケバ

$$y\frac{d\xi}{dy}=\left(\frac{1}{\lambda}-p\right)\xi+\cdots\cdots\cdots$$

ナル形ニナル、コノ方程式ノ解ハ

$$\xi=Cy^{\frac{1}{\lambda}-p}F_1\left(Cy^{\frac{1}{\lambda}-p},\ y\right) \qquad (F_1(0,0)=1)$$

ナル形ニ書ケル。コレカラ順次ニ

$$x = Cy^{\frac{1}{\lambda}} F_1\left(Cy^{\frac{1}{\lambda}-p}, y\right)$$

$$\left(\frac{x}{C}\right)^{\lambda} = y F_2\left(Cy^{\frac{1}{\lambda}-p}, y\right)$$

$$y = \left(\frac{x}{C}\right)^{\lambda} F_3\left(Cy^{\frac{1}{\lambda}-p}, \left(\frac{x}{C}\right)^{\lambda}\right)$$

$$Cy^{\frac{1}{\lambda}-p} = C\left(\frac{x}{C}\right)^{1-p\lambda} F_4\left(Cy^{\frac{1}{\lambda}-p}, \left(\frac{x}{C}\right)^{\lambda}\right)$$

$$Cy^{\frac{1}{\lambda}-p} = x\left(\frac{x}{C}\right)^{-p\lambda} F_5\left(x\left(\frac{x}{C}\right)^{-p\lambda}, \left(\frac{x}{C}\right)^{\lambda}\right)$$

ヲ得ル．コレカラ (ψ) ナル展開式ヲ得ルノデアル。併シ此ノ方法ハ途中デ y ヲ独立変数ニ取ッテ居ルカラ $P(x,y)$, $Q(x,y)$ ガ x ニ関シテモ正則トイフ仮定ヲ必要トシ、x ヲ実変数トシタ場合ニハ使ヘナイ。

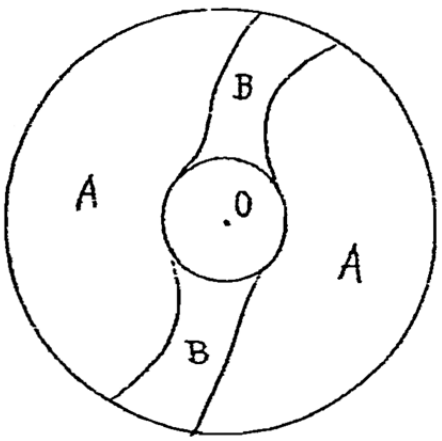
§6. 以上述ベタ所カラ次ノ結論ヲ得ル。

圖4, 5 ニ於テハ同心円ノ中心ハ O，半径ハ大キイ方ガ Δ_1，小サイ方ガ $\Delta_2 x_0^{\frac{1}{p}}$ デアル。Δ_1, Δ_2 ハ或キマッタ正ノ数デアルガ，Δ_2 ノ方ハ x_0 ヲ小サク取ルコトニヨリ幾ラデモ小サクスルコトガ出来ル。

I. $\mu > \frac{1}{p}$ ナラバ，$y(x_0) = y_0$ ヲ満足スル (A) ノ解ハ y_0 ガ第4図ニ於ケルA ニ属スル時

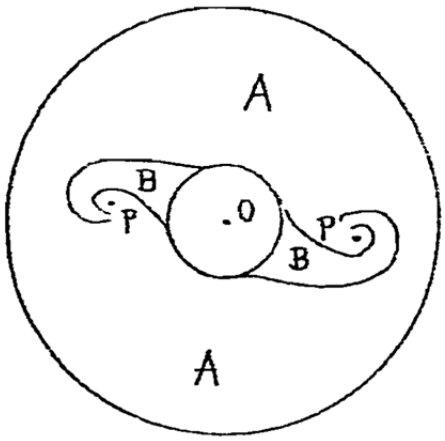
$$\lim_{x \to +0} x^{-\frac{1}{p}} y(x) = \alpha_0$$

ヲ満足スル、y_0 ガB＝属スルナラバ 0, x_0 ノ間ノ或 x ノ値デ $|y(x)| = \Delta_2 x^{\frac{1}{p}}$ トナル。



第４圖

II. $\mu < 0$ ナラバ、$y(x_0) = y_0$ ヲ満足スル (A) ノ解ハ y_0 ガ第5図ニ於ケルA＝属スルトキ 0, x_0 ノ間ノ或 x ノ値デ $|y(x)| = \Delta_1$ トナル。y_0 ガB＝属スルナラバ 0, x_0 ノ間ノ x ノ或値デ $|y(x)| = \Delta_2 x^{\frac{1}{p}}$ トナル。



第５圖

A, Bヲ分ツ曲線ノ漸近点P（p 個アル）＝ y_0 ガ一致スル時ニハ其ノ解ハ (4) ナル形ニ展開サレル。

III. $0 < \mu < \frac{1}{p}$ ナラバ、$y(x_0) = y_0$ ヲ満足スル (A) ノ解ハ y_0 ガ第5圖ニ於ケルA＝属スルトキ (4) ナル形ニ展開サレル。y_0 ガB＝属スルナラバ、0, x_0 ノ間ノ或ル x ノ値デ $|y(x)| = \Delta_2 x^{\frac{1}{p}}$ トナル。A, Bヲ分ツ曲線ノ漸近点P＝ y_0 ガ一致スル時ニハ其ノ解ハ (4) ナル形ニ展開サレル。

未ダ $\mu = 0$ 又ハ $\frac{1}{p}$ ノ場合ガ残ッテ居ルシ補足スベキ事柄モアルガ、次第ニ報告スル積リデアル、兎ニ角此ノヤウ

ニシテ $\Delta_2 x^{\frac{1}{p}} \leqq |y| \leqq \Delta_1$ ナル範囲ニ於ケル解ノ様子ガ分ル、$|y| \leqq \Delta_2 x^{\frac{1}{p}}$ ノ部分ガ分ラナイノハ已ムヲ得ナイ、何故カトイヘバソコデハ $P_1(x, y) = a + \cdots\cdots$ ノ書カレテナイ部分ガ影響ヲ及ボスカラデアル。