



Title	一階常微分方程式ノ特異点ニ就テ
Author(s)	福原, 満洲雄
Citation	全国紙上数学談話会. 1935, 63, p. 3-10
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74159
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

237. 一階常微分方程式ノ特異点ニ就テ

福原満洲雄 (北大)

§1. 前回ノ續キトシテ

$$(A) \quad x \frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$$

ニ於テ $P(x, y)$, $Q(x, y)$ が次ノ形ニ書ケル場合ヲ考ヘヨ
ウ。

$$P(x, y) = P_0(y) + xP_1(x, y)$$

$$Q(x, y) = Q_0(y) + xQ_1(x, y)$$

$$P_0(y) = \lambda y^p + \dots$$

$$Q_0(y) = y^{p-1} + \dots$$

展開式ニ関スル假定ハ例ノ通りデヨイノデアルジ記号ガゴタ

ゴタシテ來ルカラ簡單ニ $P_0(y), Q_0(y)$ ハ $y=0$ デ,

$P_1(x, y), Q_1(x, y)$ ハ $x=y=0$ デ正則ト假定シテ置ク.

併シ必要ナノハ正則性デハナク近似的ノ性質デアレコトハ証明カラ余ル. $p=1$ ナラバ前回調べタ場合ニナルカラ, ココデハ $p>1$ トスル.

§2. $P_1(0, 0) \neq a$ ナラバ (A)ヲ形式的ニ満足スルマウニ

$$(A) \quad y \sim x^{\frac{1}{p}} \left\{ \alpha_0 + \alpha_1 x^{\frac{1}{p}} + \dots + \alpha_j x^{\frac{j}{p}} + \dots \right\}$$

ノ係數ヲキメル. $\lambda + \frac{1}{p}$ ナラバ α_0 ハ

$$\left(\frac{1}{p} - \lambda \right) \alpha_0^p = a$$

カラキマル、故ニソノ取り方ハ p 通りアル. λp^2 が p より大キナ整数デナケレバ $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ ハ常數トシテ (α_0 ノ値ヲ一度キメテ了ヘバ) 唯一通りニキマル、 λp^2 が p より大キナ整数ナラバ一般ニ $\log x$ が現ハレル. 何レニシテモ

$$y = x^{\frac{1}{p}} (\alpha_0 + z)$$

ト置ケバ z が満足スル方程式ハ

$$(B) \quad x \frac{dz}{dx} = \left(\lambda - \frac{1}{p} \right) z + \dots$$

ナル形ヲ持ツ. コノニ書オレテナイ部分ハ $x^{\frac{1}{p}}$, z ノ冪級數デ, ドノ項モ $x^{\frac{1}{p}}$ 又ハ z^2 ヲ因子ニ含ム. 從ツテ前ニ得ノ結果ヲ利用スルコトが出来、正ノ數 ε, δ が十分小サイ

トキ

$$0 < x \leq \delta, \quad |yx^{-\frac{1}{p}} - \alpha_0| \leq \varepsilon$$

ナレ範圍 = 於ケル (A) ノ解ノ様子ガナル。

§3. $y = x^{\frac{1}{p}}u$ ト置ケル (A) ハ

$$(C) \quad x \frac{du}{dx} = \frac{\lambda u^p + a + x^{\frac{1}{p}}(\dots\dots\dots)}{u^{p-1} + x^{\frac{1}{p}}(\dots\dots\dots)} - \frac{1}{p} u$$

トナル。書カレテナイ部分ハ $x^{\frac{1}{p}}$, u ノ函数ト考ヘテ $(0, 0)$

デ正則デアル、故ニ $x \rightarrow 0$ ノ時 (C) ノ右辺ハ

$$(C') \quad x \frac{du}{dx} = \frac{\lambda u^p + a}{u^{p-1}} - \frac{1}{p} u$$

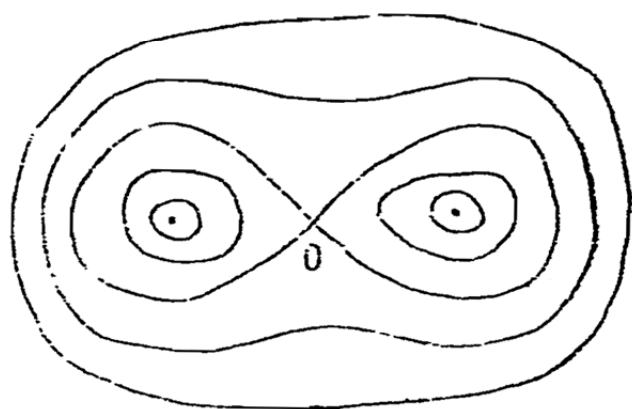
ノ右辺 = 收斂スル、(C') ヲ積ムスレバ

$$u^p = \frac{pa}{1-p\lambda} + Cx^{p\lambda+1}$$

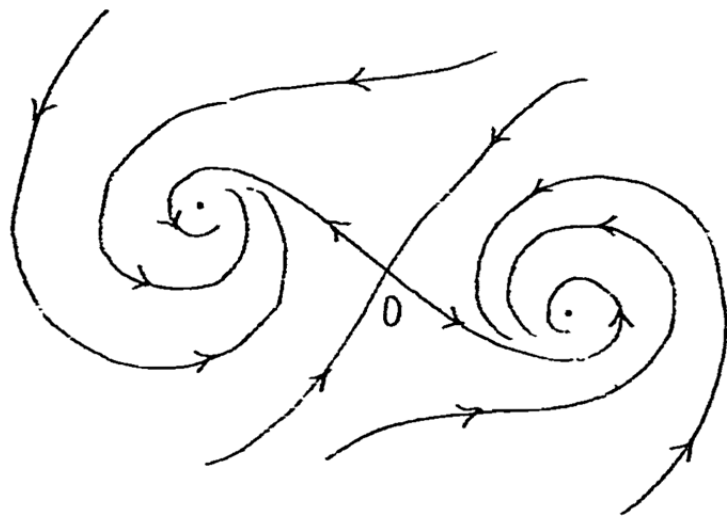
ヲ得ル。 $x \rightarrow +0$ ノ時 u ガ描ク曲線ハ μ ノ實部 μ ガ $\frac{1}{p}$ ニ等シイナラバ第1圖ノ

ヤウニ、 $\mu > \frac{1}{p}$ ナラバ第2圖ノヤウニナル。

$\mu < \frac{1}{p}$ ナラバ第2圖 = 於イテ矢ノ向キヲ反對ニスレバヨイ。(圖 = 於イテハ $p=2$ トシタ)



第1圖



第 2 圖

§ 4. 今度ハ

$$0 < x < \delta, \quad Mx^{\frac{1}{p}} < |y| < \Delta$$

ナル部分ヲ考ヘル、ソコデハ

$$\left| \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} - \frac{P_0(y)}{Q_0(y)} \right| < \varepsilon x^{\frac{1}{p}}$$

が成立シ、 M ヲ大キク取ルコトニヨリ ε ヲ幾ラデモ小サクスルコトが出来ル。故ニ (A) ト

$$(A') \quad x \frac{dy}{dx} = \frac{P_0(y)}{Q_0(y)}$$

トノ比較ニナル。(A')ノ解ハ

$$y = Cx^\mu + \dots \equiv \varphi(Cx^\mu)$$

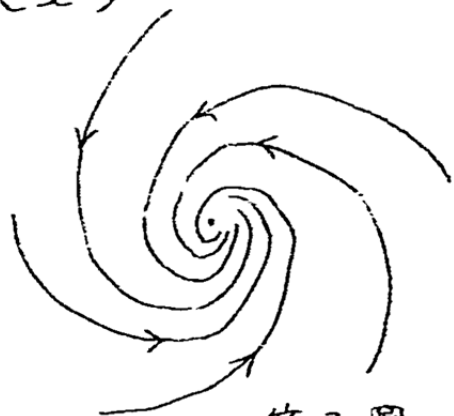
ナル形ニ書ケルカラ $x \rightarrow +0$ ノ

時 y が描ク曲線ハ $\mu > 0$ ナラ

バ第 3 圖ノ如クニナル。 $\mu < 0$

ナラバ矢ノ向キヲ反対ニスレバ

ヨイ、 $\mu = 0$ ナラバ 0 ヲ内部



第 3 圖

= 含ム閉曲線トナル。

$$\S 5. \quad 0 < \mu < \frac{1}{p} \text{ ナラバ}$$

勝手ナCノ値=對シテ

$$(v) \quad \lim_{x \rightarrow +0} x^{-\mu} [y - \varphi(Cx^{\lambda})] = 0$$

トナルヲウナ (A) ノ解が唯一ツ存在スル、而モ

$$0 < x_0 < \delta, \quad Mx_0^{\frac{1}{p}} < |y(x_0)| < \Delta$$

ナル初期條件ヲ満足スル (A) ノ解ハ適當ナCノ値=對シテ (I) ヲ満足スル、更ニ $P(x, y), Q(x, y)$ ノ y = 関スル正則性カラ (I) ヲ満足スル (A) ノ解ヲCノ函数ト考ヘタトキ $0 < |C| < \infty$ ナ一價正則トナルコトガ分ル、依ツテ其ノ解ハCノ *Laurent* 級数ニ展開サレル:

$$(v) \quad y = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \psi_j(x) C^j.$$

此ノ展開式ハ $P(x, y), Q(x, y)$ が $(0, 0)$ デ正則トイフ假定ノ下ニ於テハ新シイモノデハナイ、此ノ展開式ヲ導キ出ス從來ノ方法ヲ念ノタメニ述ベテ置ケ。

$$x = y^{\frac{1}{\lambda}} \xi \quad \text{ト置ケバ}$$

$$y \frac{d\xi}{dy} = \left(\frac{1}{\lambda} - p \right) \xi + \dots$$

ナル形ニナル、コノ方程式ノ解ハ

$$\xi = Cy^{\frac{1}{\lambda} - p} F_1(Cy^{\frac{1}{\lambda} - p}, y) \quad (F_1(0, 0) = 1)$$

ナル形ニ書ケル。コレカラ順次ニ

$$x = Cy^{\frac{1}{\lambda}} F_1(Cy^{\frac{1}{\lambda}-p}, y)$$

$$\left(\frac{x}{C}\right)^{\lambda} = y F_2(Cy^{\frac{1}{\lambda}-p}, y)$$

$$y = \left(\frac{x}{C}\right)^{\lambda} F_3(Cy^{\frac{1}{\lambda}-p}, \left(\frac{x}{C}\right)^{\lambda})$$

$$Cy^{\frac{1}{\lambda}-p} = C\left(\frac{x}{C}\right)^{1-p\lambda} F_4(Cy^{\frac{1}{\lambda}-p}, \left(\frac{x}{C}\right)^{\lambda})$$

$$Cy^{\frac{1}{\lambda}-p} = x\left(\frac{x}{C}\right)^{-p\lambda} F_5\left(x\left(\frac{x}{C}\right)^{-p\lambda}, \left(\frac{x}{C}\right)^{\lambda}\right)$$

ヲ得ル。コレカラ (4) ナル展開式ヲ得ルノデアル。併シ此ノ方法ハ途中デ y ヲ独立変数ニ取ツテ居ルカラ $P(x, y), Q(x, y)$ ガ x ニ關シテモ正則トイフ假定ヲ必要トシ、 x ヲ実変数トシタ場合ニハ使ヘナイ。

§ 6. 以上述べタ所カラ次ノ結論ヲ得ル。

圖 4, 5 ニ於テハ同心円ノ中心ハ 0, 半径ハ大キイ方ガ Δ_1 , 小サイ方ガ $\Delta_2 x_0^{\frac{1}{p}}$ デアル。 Δ_1, Δ_2 ハ或キマツタ正ノ數デアルガ, Δ_2 ノ方ハ x_0 。ヲ小サク取ルコトニヨリ幾ラデモ小サクスルコトが出来ル。

I. $\mu > \frac{1}{p}$ ナラバ, $y(x_0) = y_0$ ヲ満足スル (A) ノ解ハ y_0 ガ第 4 圖ニ於ケル A ニ屬スル時

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^{-\frac{1}{p}} y(x) = \infty.$$

ヲ満足スル、 y_0 が B = 属スル
ナラバ $0, x_0$ ノ間ノ或 x ノ値デ
 $|y(x)| = \Delta_2 x^{\frac{1}{p}}$ トナル。

II. $\mu < 0$ ナラバ、

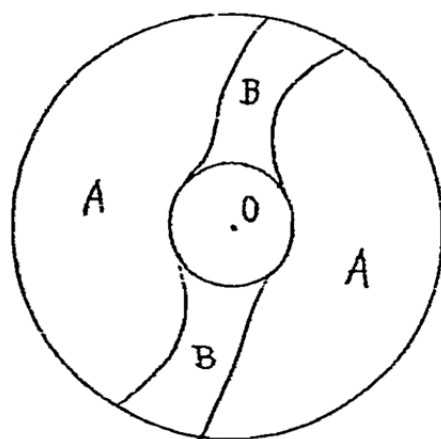
$y(x_0) = y_0$ ヲ満足スル (A) ノ
解ハ y_0 が第5圖ニ於ケル A =
属スルトキ $0, x_0$ ノ間ノ或 x ノ
値デ $|y(x)| = \Delta_1$ トナル。 y_0
が B = 属スルナラバ $0, x_0$ ノ間
ノ x ノ或値デ $|y(x)| = \Delta_2 x^{\frac{1}{p}}$
トナル。

A, B ヲ分ツ曲線ノ漸近点 P
(p 個アル) = y_0 が一致スル
時ニハ其ノ解ハ (α) ナル形ニ展
開サレル。

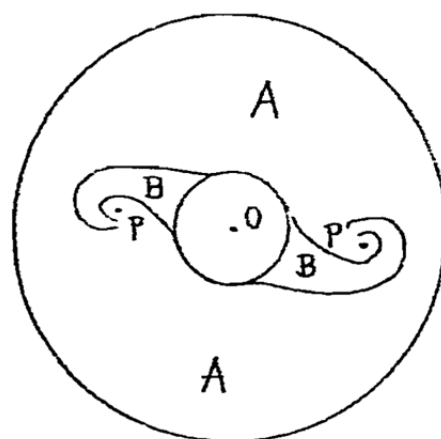
III. $0 < \mu < \frac{1}{p}$ ナラバ、 $y(x_0) = y_0$

ヲ満足スル (A) ノ解ハ y_0 が第5圖ニ於ケル A = 属スルトキ
(ψ) ナル形ニ展開サレル。 y_0 が B = 属スルナラバ、 $0, x_0$
ノ間ノ或 x ノ値デ $|y(x)| = \Delta_2 x^{\frac{1}{p}}$ トナル。 A, B ヲ分ツ
曲線ノ漸近点 $P = y_0$ が一致スル時ニハ其ノ解ハ (α) ナル形
ニ展開サレル。

未ダ $\mu = 0$ 又ハ $\frac{1}{p}$ ノ場合が残ツテ居ルシ補足スベキ
事柄モアルガ、次第ニ報告スル積リデアル、兎ニ角此ノヤウ



第4圖



第5圖

ニシテ $\Delta_2 x^{\frac{1}{p}} \leq |y| \leq \Delta_1$ ナル範圍ニ於ケル解ノ様子が分
 ル、 $|y| \leq \Delta_2 x^{\frac{1}{p}}$ ノ部分が分ラナイノハ已ムヲ得ナイ、何故
 カトイヘバソコデハ $P_1(x, y) = a + \dots\dots\dots$ ノ書カレテナイ
 部分が影響ヲ及ボスカラデアル。