



|              |                                                                             |
|--------------|-----------------------------------------------------------------------------|
| Title        | 箱數方程式 $f_k(x) = F(x)$ 二就イテ                                                  |
| Author(s)    | 南雲, 道夫                                                                      |
| Citation     | 全国紙上数学談話会. 1935, 63, p. 11-17                                               |
| Version Type | VoR                                                                         |
| URL          | <a href="https://doi.org/10.18910/74161">https://doi.org/10.18910/74161</a> |
| rights       |                                                                             |
| Note         |                                                                             |

*The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

# 239. 函数方程式 $f^k(x) = F(x) = \text{就テ}$

南 雲 道 夫 (阪大)

[I] 福原氏が注意サレタ如ク (紙上談話會 61 号 222) Schröder ノ方程式ト同等ナ  $[F(x) \text{ヲ既知} \chi \text{ヲ未知函数トスル}]$  方程式

$$(1) \chi F \chi^{-1}(x) = Cx$$

ヲ解ケバ,  $\lambda^k = C + \lambda = \text{ツイテ}$

$$(2) f(x) = \chi^{-1}(\lambda \chi(x))$$

ト置ケバ

$$(3) f^k(x) = F(x)$$

トナル。  $\left[ f^k(x) = \underbrace{f(f(\dots(f(x))\dots))}_{k \text{ 回}} \right]$

故ニ  $F(x)$  が増加ノトキハ  $C > 0$ , 減少ノ時ハ  $C < 0$  トシテ

(1)ヲ解ケバ, (2)ニヨツテ (3)ノ解が興ヘラレル。

今特ニ  $F(0) = 0$ ,  $x = 0$  デ  $F(x)$  が 正則、且ツ

$$F'(0) \neq 0 \quad |F'(0)| \neq 1$$

ナル場合ニハ (1) ハ正則ナ解  $\chi(x)$  [ $\chi(0)=0$ ] ヲ持ツ。

[福原氏常微分方程式論 (岩波講座) 195頁——197頁参照]

從ツテふらんす式、*en général* ニハ  $F(x)$  が増減シ、イザレノ場合ニモ問題が解ケタト言ヘバ言ヘナイコトハナイ。

[2] 次ニ問題トナルノハ、“ $F(x)$  が  $x=0$  ノ近傍ヲ純單調連続ナルトキ (1) が解ケルカドウカ？ 又 (1) が解ケナクトモ他ノ方法デ (3) が解ケルカドウカ？”デアアル。

一俤此ノ種ノ問題ノ基本的ナ考ヘノーツハ、——既ニ福原君ガ強調サレタ如ク (59号 209) ——変換トイフコト、即チ

$$\chi f \chi^{-1} = g$$

トスレバ

$$\chi f^n \chi^{-1} = g^n$$

(或ハ  $\chi f_i \chi^{-1} = g_i$  トスレバ、 $\chi f_1 f_2 \chi^{-1} = g_1 g_2$  等) が成立スルコトデアアル。ソコデ我々ハ先ヅ“如何ナル場合ニ  $f(x)$  ヲバ  $g(x)$  = 変換スルマウナ  $\chi$  が存在スルカ？”ヲ論ズベキデアアル。

此処デハ常ニ純單調連続函数ノミヲ考ヘル。(ソレハ位相幾何學的寫像トシテ考ヘラレルカラデアアル。)

(i) 先ヅ  $\chi f \chi^{-1} = g$

=於テ  $\begin{cases} f \text{ が増加ナラバ, } g \text{ も増加函数} \\ f \text{ が減少ナラバ, } g \text{ も減少函数} \end{cases}$

ナレコトハ明ラカデアル。(  $\chi$  ハ増加デモ減少デモカマハ  
ナイ)

(ii) 次  $= f(x)$  ノ不動点  $[f(\xi) = \xi$  ナル  $\xi$  ノコト] ハ  
 $g(x)$  ノ不動点  $=$  変換サレル (証明容易). 従ッテ  $f(x) =$   
於ケル不動点ヲ含マヌ区間ハ,  $g(x) =$  於ケル不動点ヲ含マ  
ヌ区間  $=$  変換サレル (可逆的  $=$ ). 不動点ヲ含マヌ区間ヲ假  
 $=$  "自由ナ区間" ト名付ケル.

(iii)  $(\alpha, \beta)$  ヲ  $f(x)$  ガ不動点ヲ含マヌ区間トシ,  $(\gamma, \delta)$   
ヲ之レニ對スル  $g(x)$  ノ不動点ヲ含マヌ区間トスレバ

$(\alpha, \beta)$  デ  $f(x) > x$  ナラバ,  $(\gamma, \delta)$  デ  $g(x) > x$ .

〃  $f(x) < x$  ナラバ, 〃  $g(x) < x$ .

(証明  $=$  ハ  $\chi f$  ト  $g\chi$  トノ大小ヲ比較セヨ)

[3]  $f(x)$  ガ [従ッテ  $g(x) \in$ ] 純増加ノ場合:

$f(x)$  ノ不動点ノ分布ハ任意ニ複雑ニナリ得ル (勿論閉集  
合).

$f(x)$  カ  $g(x) =$  変換サレ得ルタメニハ先ッ  $f(x)$  ノ不  
動点ノ分布ト  $g(x)$  ノ不動点ノ分布トガ *topologisch*  $=$   
同型ナルヲ要スル。

次  $= f(x)$  ト  $g(x)$  トノ 相對應スル自由ナ区間  $=$  於テ  
ハ

$f(x) > x$  ナラバ  $g(x) > x$ ,

$f(x) < x$  ナラバ  $g(x) < x$ .

デナケレバナラヌ。

以上、ニツノ性質（不動点ト自由區間ニ關スル條件）が満タサレテキルトキニハ、 $f(x)$ ヲ $g(x)$ ニ交換スルマデナ $\chi$ 〔純單調連続函数〕が存在スル。

何トナレバ  $f(x)$ ノ不動点ヲ $g(x)$ ノ不動点ニ對應セシメ〔*topologisch* = 同型ト分布ヲナスニヨリ〕ソレニ從ツテ自然ニ對應スル自由區間ニ於イテハ、夫々 *Abel*ノ方程式

$$\varphi(t+1) = f\varphi(t)$$

$$\psi(t+1) = g\psi(t)$$

ヲ解イテ  $\chi = \psi\varphi^{-1}$  トスレバヨイ。〔純増加連続函数ニ就テハ、*Abel*ノ方程式ハ自由區間ニ於テ常ニ容易ニ解ケル！（57号197参照）〕

[4]  $f(x)$ が〔從ツテ $g(x) \in$ 〕純減少ノ場合：

$f(x)$ ノ不動点ハ只一ツ存在スル。今便宜上ツノ不動点ヲ $x=0$ ト假定スル。 $g(x)$ ノ不動点 $\in x=0$ ト假定スル。

$x' = f(x)$ ナル寫像ハ $x < 0$ ,  $x > 0$ ナルニツノ部分ヲ交換スル！ ソコデ  $x \leq 0$ ノ時ハ

$$f(x) = f_1(-x), \quad g(x) = g_1(-x), \quad \chi(x) = -\chi_1(-x)$$

トシ、 $x \geq 0$ ノ時ハ

$$f(x) = -f_2(x), \quad g(x) = -g_2(x), \quad \chi(x) = \chi_2(x)$$

ト置ケル  $f_i(x)$ ,  $g_i(x)$ ,  $\chi_i(x)$ ハイツレモ  $x \geq 0$ デ定義サレタ純増加函数トナル〔 $\chi(x)$ ハ純増加ト假定ス〕。

之ニヨリ

$$\chi f \chi^{-1} = g$$

ノ代リ  $x \geq 0$  = 於ケル聯立方程式

$$\begin{cases} \chi_2 f_1 \chi_1^{-1} = g_1, & (\text{元ノ } x \geq 0 \text{ = 於テ}) \\ \chi_1 f_2 \chi_2^{-1} = g_2 & (\text{元ノ } x \geq 0 \text{ = 於テ}) \end{cases}$$

ヲ得ル。之ハ次ノ聯立方程式ト同等ナル。

$$\begin{cases} \chi_1 f_2 f_1 \chi_1^{-1} = g_2 g_1, \\ \chi_2 = g_1 \chi_1 f_1^{-1}. \end{cases}$$

第一ノ式ニハ解ケバ ( $\chi_1$  ノミノ方程式), 第二ハ自然ニ解ケル。從ツテ問題ハ既ニ論ゼラレタ純増加ノ場合ニ歸着シタ。

[5] 以上ノ一般論ヲ特ニ Schröder ノ方程式 (I) = 適用スルバ

(a)  $F(x)$  が純増加ノ時,  $C > 0$ .

(a<sub>1</sub>)  $C > 1$  ノ時ハ

$$x > 0 \text{ デ } F(x) > x, \quad x < 0 \text{ デ } F(x) < x.$$

(a<sub>2</sub>)  $C < 1$  ノ時ハ

$$x > 0 \text{ デ } F(x) < x, \quad x < 0 \text{ デ } F(x) > x.$$

(a<sub>3</sub>)  $C = 1$  ノ時

$$F(x) \equiv x \quad [X(x) \text{ ハ任意}].$$

(b)  $F(x)$  が純減少ノ時,  $C < 0$ .

(b<sub>1</sub>)  $C > -1$  ノ時ハ

$$-x < F^2(x) < x.$$

(b<sub>2</sub>)  $C < -1$  の時、

$$x < 0 \text{ 对 } F^2(x) < x, \quad x > 0 \text{ 对 } F^2(x) > x.$$

(b<sub>3</sub>)  $C = -1$  の時、

$$F^2(x) \equiv x.$$

以上ノ條件が満タサレテキルコトが Schröder ノ方程式

(1) が解ケルタメノ必要條件デアル!

[6] 尚 (1) が解ケナイ時デモ

$$(3) \quad f^k(x) = F(x)$$

ハ次ノ如クニシテ  $F(x)$  が純減少ノ場合ニモ〔純増加ノ場合  
ハ既ニ論ゼラレタ〕解キ得ル。(kハ奇数デナケレバナラヌ)

前述ノ [4]ニ於テ

$$\begin{cases} \chi_2 f_1 \chi_1^{-1} = g_1, \\ \chi_1 f_2 \chi_2^{-1} = g_2. \end{cases}$$

トアル  $g_1, g_2$ ヲバハ特ニ  $g_1 = g_2$  ナルヤウニ選ブ。

即チ  $g_1 = g_2 = g$  トオケバ, (3)ノ代リニ (kハ奇数ノト  
キハ)

$$\begin{cases} \chi_2^{-1} g^k \chi_1 = F_1, \\ \chi_1^{-1} g^k \chi_2 = F_2 \end{cases}$$

從ツテ之ト同等ナ

$$\begin{cases} \chi_1^{-1} g^{2k} \chi_1 = F_2 F_1, \\ \chi_2 = g^k \chi_1 F_1^{-1} \end{cases}$$

ヲ解クコト=帰着スル。之ハ純増加ノ場合ノ

$$g^{2k}(x) = \chi_1 F_2 F_1 \chi_1^{-1}$$

ヲ解クコトアルカラ, 57号 1977年論ジタ場合=ヨツテ  
常=解カレルコトガワカッタ。(  $\chi_1$  ハ任意デヨイ )

---

以上ヲ純單調ノ場合=於ケル函数方程式

$$f^k(x) = F(x)$$

ハ全部解決シタト思フ。純單調ナル假定ヲ除イタラバドウ  
ナルカ? 之ガ次=來ル難問題デアル。