



Title	或種ノ積分方程式ニ就イテ（Ⅲ）
Author(s)	泉， 信一； 北川， 敏男
Citation	全国紙上数学談話会． 1935， 63， p. 21-28
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74163
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

241. 或種ノ積分方程式ニ就イテ(III)

泉 信一(東北) 北川 敏男(阪大)

$$\S 4. \text{ 積分方程式 } f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_a^b f^{(k)}(x+t) d\varphi_k(t)$$

ニツイテ

1. 本章デハ次ノ方程式ヲ考ヘヨウ。

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_a^b f^{(k)}(x+t) d\varphi_k(t) \dots\dots\dots (1)$$

コトニ、 (a, b) ハ任意ノ有限區間デ、 $\varphi_k(t)$ ($k=0, 1, 2, \dots\dots, n-1$) ハ $[a, b]$ = テ與ヘラレヌ有界変分ノ函数トスル。

定理] ニナラツテ

$$f^{(n-1)}(x) = O(e^{A|x|}) \dots\dots\dots (2)$$

ト假定スル。

$$\text{從ツテ } |f^{(k)}(x)| \leq B_k e^{A'|x|} \quad (k=0, 1, 2, \dots\dots, n-1)$$

ナル $A' > A$ ガトレル。

従ッテ

$$\left| \int_a^b f^{(k)}(x+t) d\varphi_k(t) \right|$$

$$\leq B_k \int_a^b e^{A'(|x|+|t|)} |d\varphi_k(t)|$$

$$\text{故} = \int_a^b e^{A'|t|} |d\varphi_k(t)| = C_k \quad (k=0, 1, 2, \dots, n-1) \text{ト}$$

オクトキ

$$(1) \text{ カラ } |f^{(n)}(x)| \leq \left(\sum_{k=0}^{n-1} B_k C_k \right) e^{A'|x|}.$$

$$\text{今 } B_n = \sum_{k=0}^{n-1} B_k C_k \text{ ナリト定義スルト}$$

$$|f^{(n)}(x)| \leq B_n e^{A'|x|}.$$

サテ (1) ヲ満足スル $f(x)$ ハ何回デモ微分出来ル; 今 $B_0, B_1,$
 $\dots, B_{n+m-1}$ ガ決定サレタトスレバ, (1) カラ

$$f^{(m+n)}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_a^b f^{(m+k)}(x+t) d\varphi_k(t)$$

ナルガ故=

$$|f^{(m+n)}(x)| \leq \left(\sum_{k=0}^{n-1} B_{m+k} C_k \right) e^{A'|x|}$$

ヲ得ル。従ッテ一般=

$$B_m = \sum_{k=0}^{n-1} B_{m-n+k} C_k \quad (m=n, n+1, \dots)$$

= ヨツテ B_m ヲ決定スレバ

$$|f^{(m)}(x)| \leq B_m e^{A'|x|}$$

ヲ得ル。シカモ上ノ定義カラ容易ニ計算出來ル様ニ

$$|B_m| < D^m \quad (m=0, 1, 2, \dots)$$

トナルモノナ $D > 0$ が存在スル。

ソレ故ニ (1)ヲ満足スル $f(x)$ ハ正則ナル, 依ツテ Taylorノ展開ヲ用キテ

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_a^b f^{(k)}(x+t) d\varphi_k(t) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_a^b \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(k+m)}(x)}{m!} t^m \right) d\varphi_k(t) \\ &= \sum_{\delta=0}^{\infty} f^{(\delta)}(x) \left(\sum_{\substack{m+k=\delta \\ k=0, 1, 2, \dots, n-1}} \frac{\int_a^b t^m d\varphi_k(t)}{m!} \right) \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

$$\text{今 } a_{\delta} = \sum_{\substack{m+k=\delta \\ k=0, 1, 2, \dots, n-1}} \frac{\int_a^b t^m d\varphi_k(t)}{m!} \quad (\delta \neq n)$$

$$a_n = \sum_{\substack{m+k=n \\ k=0, 1, 2, \dots, n-1}} \frac{\int_a^b t^m d\varphi_k(t)}{m!} - 1$$

トオケバ, (1)ハ

$$\sum_{\delta=0}^{\infty} a_{\delta} f^{(\delta)}(x) = 0 \dots\dots\dots (4)$$

ナル無限次ノ微分方程式トナル。

然ルニ, $\delta > n$ トシ, $\delta = m + n - 1$ トスルトキ

$$a_\delta = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(m+k)!} \int_a^b t^{m+k} d\mathcal{P}_{n-1-k}(t).$$

然ルニ

$$-\lg \left| \frac{1}{(m+k)!} \int_a^b t^{m+k} d\mathcal{P}_{n-1-k}(t) \right|$$

$$\cong s \lg s$$

依ツテ

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s \lg s}{\lg \frac{1}{|a_s|}} = 1$$

故ニ (4) ノ母函数! order ハ 1 デアル。

次ニ

$$\begin{aligned} \sqrt[s]{|a_s|} &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt[s]{\frac{1}{(m+k)!} \left| \int_a^b t^{m+k} d\mathcal{P}_{n-1-k}(t) \right|} \\ &= O \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt[s]{\frac{b^s}{s!} \int_a^b |d\mathcal{P}_{n-1-k}(t)|} \right\}. \end{aligned}$$

$$\text{故ニ } \lim_{s \rightarrow \infty} s \sqrt[s]{|a_s|} < +\infty.$$

依ツテ (4) ノ母函数ハ Maximal type = ハナラナイ。

故ニ Valiron ノ定理ガ應用出來ル。乃チ次ノ定理ヲ得ル。

定理 5. (a, b) ヲ任意ノ有限區間トシ, $\mathcal{P}_k(x)$ ハ

$(a-\varepsilon, b+\varepsilon)$ で有界変分ノ函数トスル。然ルトキ

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_a^b f^{(k)}(x+t) d\varphi_k(t)$$

及ビ $f^{(n-1)}(x) = O(e^{A|x|})$

ヲ満足スル $f(x)$ ハ常ニ正則デ且ツ次ノ形ニ書クコトガ出來ル。

$$f(x) = \sum_k P_k(x) e^{\lambda_k x}$$

コゝニ λ_k ハ

$$\lambda^n - \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k \int_a^b e^{\lambda t} d\varphi_k(t) = 0$$

ノ根デ $|R(\lambda_k)| \leq A + \varepsilon$ ノトシ $P_k(x)$ ハソノ次数ガ λ_k ノ multiplicity μ_k ヲリ高クナイ任意ノ polynome トシ更ニ

$$\frac{\mu_k}{\lambda_{\mu+\mu_k}} \rightarrow 0$$

トスル。

2. (1)ヲ更ニ次ノ様ニ一般ニスル。

$$\sum_{\nu=0}^n p_\nu(x) \int_a^b f^{(\nu)}(x+t) d\varphi_\nu(t) = g(x) \dots \dots \dots (1)$$

コゝニ、 $\varphi_\nu(t)$ ハ $[a, b]$ で有界変分ノ函数、 $p_\nu(x)$ ハ高々 ν 次ノ多項式デアルトス。 ($\nu=0, 1, 2, \dots, n$)

$g(x)$ ハ整函数デ指數ハ Δ ヲコエナイ。即チ

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \sqrt[n]{g(x)} \right| \leq \delta$$

トスル。

然ルトキニ、上ノ方程式ヲミタス。指數高々 δ ナル整函数 $f(x)$ ヲ求メル問題ヲ考ヘヨウ。

$f(x)$ が高々指數 δ ト云フ條件カラ

$$\int_a^b f^{(\nu)}(x+t) d\varphi_\nu(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu+n)}(x)}{n!} \int_a^b t^n d\varphi_\nu(t)$$

トナル。何者、右辺ノ級数ニ於イテ

$$\begin{aligned} & \sqrt[n]{\left| \frac{f^{(\nu+n)}(x)}{n!} \int_a^b t^n d\varphi_\nu(t) \right|} \\ & \leq \sqrt[n]{\frac{(\delta + \varepsilon)^n}{n!} K C^n} = O\left(\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}\right) \\ & = O\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

ガカラデアル。

ソレ故ニ、與ヘラレタ方程式ト無限次ノ微分方程式トハ

$$\sum_{\nu=0}^n p_\nu(x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu+n)}(x)}{n!} \int_a^b t^n d\varphi_\nu(t) = g(x) \dots (2)$$

有限次ノ指數ヲ有スル解 $f(x)$ ヲモトメル問題ニ關スル限りニ於イテハ全ク equivalent デアル。

(2) ニ關シテハ Perron ノ理論ガアル。コレヲ適用スルタメ

$$\sum_{m=0}^{\infty} f^{(m)}(x) \left\{ \sum_{\nu=0}^n \frac{p_{\nu}(x)}{(m-\nu)!} \int_a^b t^{m-\nu} d\varphi_{\nu}(t) \right\} = g(x)$$

$$\begin{aligned} g_m(x) &\equiv \sum_{\nu=0}^n \frac{p_{\nu}(x)}{(m-\nu)!} \int_a^b t^{m-\nu} d\varphi_{\nu}(t) \\ &\equiv \sum_{r=0}^p \alpha_{m,r} x^r \end{aligned}$$

ト置ク。

但シ、コゝ = α_m , $p \neq 0$ ナル m ガ少クモ一ツハアルモノトス。

$$\text{又} \quad h_{\lambda}(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_{\nu,\lambda} x^{\nu} \quad (\lambda = 0, 1, 2, \dots, p)$$

トオク、コレハ $|x| \leq \delta$ デ正則デアル。 $h_p(x)$ ハ恒等的 = 0 = ナラナイデ、 $|x| \leq \delta$ デ m 個ノ 0 点ヲモツトス。

然ルトキニハ、Perron ノ理論カラ次ノコトガ云ヘル。

定理 6. $g(x) \equiv 0$ ノトキニハ、與ヘラレタ方程式ハ $m - p + r$ 個ノ一次的 = 独立ナ解ガアル。

コゝニ、 r ハ

$$\sum_{\lambda=0}^p h_{\lambda}(x) \frac{d^{\lambda} g(x)}{dx^{\lambda}} = 0 \dots\dots\dots (3)$$

ノ $|x| \leq \delta$ = 於ケル一次的 = 独立ナ正則解ノ数トスル。

定理 7. 一般ノ場合 解 (勿論指数ハ δ ヲコヘナイトス) ノ存在スルタメノ必要且ツ十分ナル條件ハ (3) ガ $|x| \leq \delta$

デ正則解ヲモタヌコトナリ。乃チ

homogeneous equation

$$\sum_{\nu=0}^n p_{\nu}(x) \int_a^b f^{(\nu)}(x+t) d\varphi_{\nu}(t) = 0$$

ガ $n-p$ 個ノ数ヲモツコトデアル。

コレヲ $f_1(x), f_2(x), \dots, f_{n-p}(x)$ トスレバ考
ヘル方程式ノ一般解ハ、ソレノ特殊解ヲ $f_0(x)$ トスルトキ

$$f(x) = f_0(x) + \sum_{\nu=1}^{n-p} c_{\nu} f_{\nu}(x)$$

デ與ハラレル。