OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	Picard-Vessiot ノ理論ニ就テ, 4
Author(s)	吉田, 耕作
Citation	全国紙上数学談話会. 1935, 63, p. 28-33
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74164
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

242. Picard-Vessiot ノ理論ニ就テ. 4

吉田耕作 (阪大)

domain of rationality R, element ヲ係数トスル

$$(1)\quad \frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots\cdots + p_n(x)y = 0$$

ノ Galois 群ヲ $\|A\|$ トスル。

定理1. $R(y)$ ノ幾ツカノ element $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots \alpha_k$ ガ R ノ element ヲ係数トスル線形微分方程式

$$L(y)=0$$

ノ Fundamental solutions トスル。（R(y) ノ定義ハ前論参照）。

然ラバ $\|A\|\cdot\alpha_i$; $i=1,2,\cdots\cdots,k$; モ $L(y)=0$ ヲ満足スルカラ $\|A\|$ ハ $\alpha_1,\cdots\cdots,\alpha_k$ ノ間ノ一ツノ linear substitution group G ヲ induzieren スル。G ハ $\|A\|$ = stetig homomorph ダカラ connected 且ツ明= algebraic デアル。k 次ノ non singular matrix ノ作ル群 M_k ニ於ケルG ノ fermeture（G ノ limiting point デ M_k ニ属スルモノヲG ニツケ加ヘテ得ラレルモノ）$\overline{G}$ ハR ノ上ノ $L(y)=0$ ノ Galois群デアル。

証明。$L(y)=0$ ノ Galois 群ヲ G_L トスル。$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots\alpha_k$（及ビソノ derivatives），R ノ element ノ rational function デソノ numerical value ∈R ナモノハ即チ R(y) ノ element デソノ numerical value ∈R ナモノダカラ $\|A\|$ 従ッテG 従ッテ $\overline{G}$ ニヨリ invariant。故ニ $\overline{G}\subseteq G_L$。明ニ $\overline{G}$ ハ G_L ニ於テ閉デタ connected, algebraic ナ群デアル。$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_k$（及ビソノ derivatives），R ノ element ノ rational function デ $\overline{G}$ ニヨッテ invariant ナモノハ即チ R(y) ノ element デ $\|A\|$ ニヨリ invariant ダカラソノ numerical

value $\in R$. 故ニ前論187 p.9 第7行目ノ式ニヨリ

$$G_k = \overline{G}$$

定理2. (1) ノ $m(<n)$ コノ独立解 $y_1, y_2, \cdots\cdots, y_m$ ガ R ノ element ヲ係数トスル線形微分方程式

(2) $Q(y) = 0$

ヲ満足スルトスレバ R ノ element ヲ係数トスル線形微分方程式 $S(Q)=0$ ガ存在シテ y ニ関スル identity

$$P(y) = S(Q(y))$$

ガ成立スル (Cf. F. Rádl: Über das verallgemeinerte gemeinsame Masze von zwei Differentialpolynomen, M.Z. 40 Bd. 3 Heft, 1935) 之ヲ symbolical ニ

(3) $P = S \times Q$

ト書クコトニスル。然ラバ

(4) $$\|A\| = \left\| \begin{matrix} B & 0 \\ X & C \end{matrix} \right\|$$

ノ如ク Galois 群 $\|A\|$ ガ分解シ夫々 m 次, $n-m$ 次 Matrix ノ群 $\|B\|$, $\|C\|$ ノ M_m, M_{n-m} ニ於ケル permeture ガ $Q=0$, $S=0$ ノ Galois 群デアル。

証明. $Q=0$, $S=0$ ノ Fundamental solutions ハ夫々 $y_1, y_2, \cdots\cdots, y_m$; $Q(y_{m+1}), Q(y_{m+2}), \cdots\cdots, Q(y_n)$ デアル。$Q=0$, $S=0$ ハ何レモ R ノ element ヲ係数トスルカラ automorphism $\|A\|$

ヲ施シタトキ

$$\|A\| \cdot Q(y_i) = Q(\|A\| \cdot y_i) = 0; \quad i = 1, 2, \cdots\cdots, m,$$

$$\|A\| \cdot Q(y_i) = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} Q(y_k) \qquad (\|A\| = (a_{ik}))$$

$$= \sum_{k=m+1}^{n} a_{i,k} Q(y_k);$$

$$i = m+1, m+2, \cdots\cdots\cdots, n。$$

故ニ $\|A\| = \begin{Vmatrix} B & O \\ X & C \end{Vmatrix}$

ノ形。故ニ定理1ヲ用フレバヨイ。

定理3. 逆ニ $\|A\|$ ガ(4)ノ如ク分解スルトキ; $y_1, y_2, \cdots\cdots, y_m$ ヲ Fundamental solutions トスル線形微分方程式

$$Q(y) = \frac{d^m y}{dx^m} + q_1(x) \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots + q_m(x) y = 0$$

ヲ作ルト $q_1, \cdots\cdots, q_m$ ハ M_m ノ従ッテ $\|B\|$ ノ従ッテ $\|A\|$ ノ invariant ダカラ $\subseteq R.$ ヨッテ

$$P = S \times Q$$

ノ如キ分解ガ可能。定理2ニヨレバ $Q = 0$, $S = 0$ ノ Galois 群ハ夫々 $\|B\| \cdot \|C\|$ ノ M_m, M_{n-m} ニ於ケル fermeture ナリ。

定理4. $P = 0$ ノ Galois 群 $\|A\|$ ガ integrable

ナラバ Lie ノ定理(筆者：連続群論 p. 126) ニヨリ

$$\|A\| = \begin{Vmatrix} a_{11} & & \\ \times & a_{22} & 0 \\ \times & \times & a_{nn} \end{Vmatrix}$$

ヨッテ定理3ニヨリ

$$P = P_1 \times P_2 \times \cdots\cdots \times P_n$$

ナル如キ<u>因数分解</u>？ ガ可能デアル。コヽニ P_i ハ R ノ element ヲ係数トスル一階ノ線形微分形式．即チ $r_i(x) \subseteq R$ トシテ

$$(5) \quad P(y) \equiv \left(\frac{d}{dx} + r_1(x)\right)\left(\frac{d}{dx} + r_2(x)\right)\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\left(\frac{d}{dx} + r_n(x)\right)\cdot y$$

(注意) 斯ル $P(y)=0$ ハ明ニ R ニ於テ integrable by quadrature。逆ニ R ニ於テ integrable by quadrature ナル $P(y)=0$ ノ Galois 群ハ integrable ダカラ (Picard: Traité 3, p. 597)

定理4'. $P=0$ ガ R ニ於テ integrable by quadrature ナタメノ必充條件ハ (5) ノ如キ因数分解ノ可能ナコトデアル。

Vessiot ノ定理 ($P=0$ ガ integrable by quadrature ナタメノ必充條件ハ $P=0$ ノ Galois 群ノ integrable ナコトデアル —— Picard. loc. cit.)

ニ於ケル充分條件ノ証明ヲ上ノ定理4ノ如クシテ求メルノガ precise 且ツワカリ易イト思ヒマス。