



Title	一階常微分方程式ノ特異点ニ就テ, IV
Author(s)	福原, 満洲雄
Citation	全国紙上数学談話会. 1935, 65, p. 1-5
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74173
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

251. 一階常微分方程式ノ特異点ニ就テ, IV

福原満洲雄 (北大)

今述ベタ所ニヨリ局部的ナ問題, 即チ y が取ル値ヲ極ク狭イ範囲ニ限ツテ, 其ノ範囲ニ於ケル解ノ行動ヲ調べルトイフ問題ヲ取扱フ方針ハ立ツタ。此等ノ局部的ノ研究ヲ組合セテ y が取ル値ニ関スル制限ヲ取除クノが最後ノ目標デアル。局部的ナ問題ハ未ダ全部取扱ハレテ居ナイガ, 特殊ナ例ダケカラハ, コレダケテ全部ノ場合ヲ盡スト結論スルコトハ出来ナイカラ, コレカラハ一般ノ方程式ヲ扱ヒ, 局部的ナ研究ハ必要ニ應ツテ行フコトニシヨウ。

§1. 簡單ノ爲

$$(A) \quad x \frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$$

ニ於テ P, Q ハ共通ナ因子ヲ含マナイ x, y ノ整多項式デ, ソレヲ x, y ノ昇冪ニ整頓シテ書イタモノヲ

$$P(x, y) = a_0(x) + a_1(x)y + \cdots + a_p(x)y^p$$

$$Q(x, y) = b_0(x) + b_1(x)y + \cdots + b_q(x)y^q$$

$$a_j(x) = a_j x^{m_j} + \cdots$$

$$b_k(x) = b_k x^{n_k} + \cdots$$

トスル。 $a_j(x) \equiv 0$ ナラバ $m_j = +\infty$, $b_k(x) \equiv 0$ ナラバ $n_k = +\infty$ トスル。 m_j が有限ナラバ $a_j \neq 0$, n_k が有限ナラバ $b_k \neq 0$ トスル。

$$(1) \quad m_j - j\rho \quad (j=0, 1, \dots, p)$$

ノ中 = 最小ノモノガニツ又ハソレ以上アル時 ρ ヲ P -order,

$$(2) \quad n_k - (k+1)\rho \quad (k=0, 1, \dots, q)$$

ノ中 = 最小ノモノガニツ又ハソレ以上アルトキ ρ ヲ Q -order,

(1), (2) ノ中 = 最小ノモノガニツ又ハソレ以上アルトキ ρ ヲ

R -order ト呼ブコトニスル。研究ノ方針ハ $(-\infty, +\infty)$ ヲ

P -order, Q -order, R -order ヲ含マナイ區間ト其

レ等ヲ含ム小サナ區間トニ分ケ, ソノ各區間 (ρ', ρ'') ニ對

シテ

$$(3) \quad 0 < x < \delta, \quad Mx^{-\rho'} \leq |y| \leq \Delta x^{-\rho''}$$

ナル範圍ニ於ケル解ノ行動ヲ調べテ, 其等ノ結果ヲ結合シテ
最後ノ結論ヲ引出サントイフノデアアル。

§2. 先ヅ最初ニ最も簡單ナ場合即チ $\rho' < \rho < \rho''$ デアル
ヌヲナ ρ ハ P -order デモ, Q -order デモ, R -order
デモナイ場合ヲ考ヘル。從ツテ (1) ノ中ニ最小ノモノガ唯一
ツアリ, (2) ノ中ニ最小ノモノガ唯一ツアリ, 其レ等ヲ
 $m_\alpha - \alpha\rho, n_\beta - (\beta+1)\rho$ トスレバ

$$(4) \quad m_\alpha - \alpha\rho + n_\beta - (\beta+1)\rho$$

デアアル。 ρ', ρ'' ハ P -order, Q -order 或ハ R -order ニナ
ツテモ構ハナイ、正ノ數 ε ガ與ヘラレタトキ正ノ數 δ, Δ ヲ十
分ニ小サク, 正ノ數 M ヲ十分ニ大キク取レバ

$$(5) \quad \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} = \frac{a_\alpha}{b_\beta} x^{m_\alpha - n_\beta} y^{\alpha - \beta} [1 + f(x, y)]$$

ト書イタ時 (3) デ

$$(b) \quad |f(x, y)| \leq \varepsilon$$

が成立スル。ソコデ (A) ト

$$(A_1) \quad x \frac{dy}{dx} = Ax^{m_\alpha - n_\beta} y^{\alpha - \beta} \quad \left(A = \frac{a_\alpha}{b_\beta} \right)$$

ト比較スルトイフ考ヘが起ル。併シ直接 = (A), (A₁)ヲ比較スルヨリ, $y = x^{-\rho} z$ ト置イテ得ラレル

$$(B) \quad x \frac{dz}{dx} = x^\rho \frac{P(x, x^{-\rho} z)}{Q(x, x^{-\rho} z)} + \rho z$$

ト, 其ノ主部カラ成ル方程式ヲ比較スル方が都合がヨイコトモアル。

$$\sigma = \beta - \alpha + 1, \quad \mu = m_\alpha - n_\beta$$

ト置ケバ (B) ノ右辺ノ主部ハ $\mu + \sigma\rho$ が正ナラバ ρz , 負ナラバ $Ax^{\mu + \sigma\rho} z^{\alpha - \beta}$ トナルカラ場合 = ヨツテ (B) ト比較スル方程式トシテ

$$(B_1) \quad x \frac{dz}{dx} = \rho z$$

ヲ取ルコトモアリ,

$$(B_2) \quad x \frac{dz}{dx} = Ax^{\mu + \sigma\rho} z^{\alpha - \beta}$$

ヲ取ルコトモアルワケデアル。故 = $\sigma, \mu, \mu + \sigma\rho$, 符号 = ヨツテ場合ヲ分ケナケレバナラナイ。

$\sigma < 0$ ナラバ $y = \frac{1}{z}$ ト置キ z ノ方程式ヲ考ヘレバ

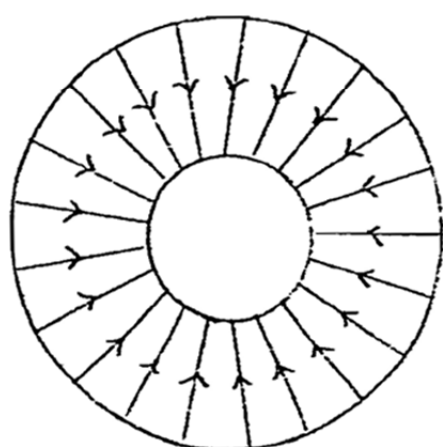
$\sigma > 0$ トナルカラ $\sigma < 0$ ノ場合ハ考ヘナイデヨイ。 $\sigma = 0$, $\mu = 0$ ハ假定(4) = 反スルカラ此ノ場合モ考ヘナイデヨイ。
 $\mu > 0$, $\rho' \leq 0 \leq \rho''$ ナラバ (A) ノ右辺ガエヲ因子 = 含ムコト
 = ナリ $\alpha = 0$ ハ真性超越点トナラナイカラ此ノ場合モ考ヘ
 ナイデヨイ。

§ 3. 残ツタ場合ニツイテ結論ヲ表示スレバ次ノヤウニ
 ナル。

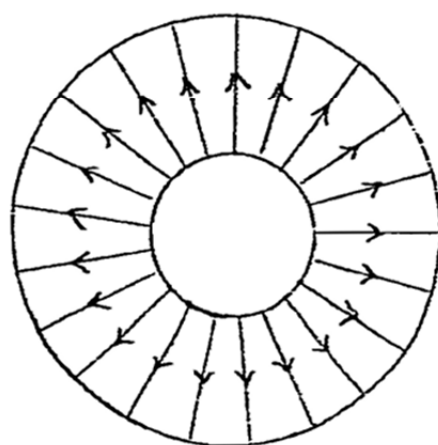
σ	μ	$\mu + \sigma \rho$	型
+	-	+	A
+	-	-	B'
+	0	+	A 但シ $\mu + \sigma \rho' > 0$ トスル。
+	0	-	B'
+	+	+	{ $\rho' > 0$ ナラバ A $\rho'' < 0$ ナラバ A'
+	+	-	
0	-	-	{ $R(\alpha/b_\rho) > 0$ ナラバ A $R(\alpha/b_\rho) < 0$ ナラバ A'
0	+	+	
0	+	+	{ $\rho' > 0$ ナラバ A $\rho'' < 0$ ナラバ A'
0	+	+	

A 型ノ場合ニハ初期條件 (x_0, y_0) ガ (3)ヲ満足スルナ
 ラバ $x \rightarrow +0$ ノトキ或所ヲ必ズ $|y| = Mx^{-\rho'}$ トナル。 A'
 型ノ場合ニハ初期條件 (x_0, y_0) ガ (3)ヲ満足スルナラバ

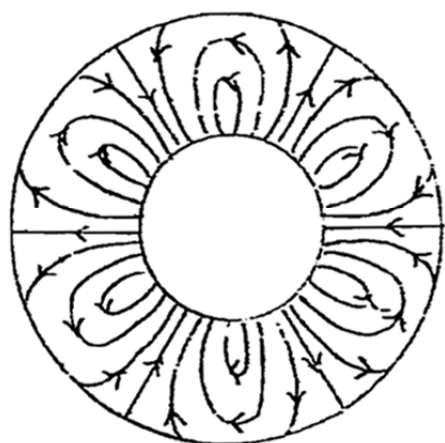
$x \rightarrow +0$ のとき或所デ必ず $|y| = \Delta x^{-p''}$ トナル。B, B' 型ノ場合ニハ初期條件 (x_0, y_0) カ (3) ヲ満足スルナラバ $x \rightarrow +0$ のとき或所デ $|y| = Mx^{-p'}$ 又ハ $|y| = \Delta x^{-p''}$ トナル。B 型ノ場合ニハ $|y| = Mx^{-p'}$ トナルノガ普通デ, B' 型ノ場合ニハ $|y| = \Delta x^{-p''}$ トナルノガ普通デアアル。(最モ極ヒ易イ場合デアアルカラ証明ハ省略シタ)



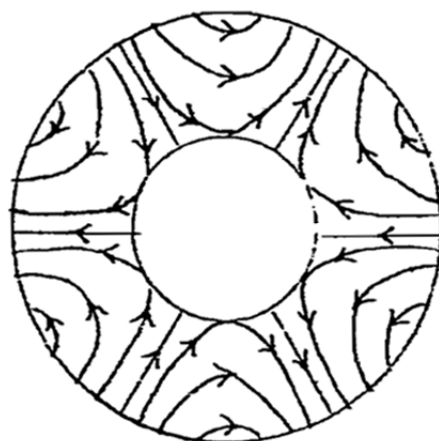
A 型



A' 型



B 型 ($\sigma = -3$)



B' 型 ($\sigma = 3$)

圖ハ $x \rightarrow +0$ のとき点 $x^p y$ ガ描ク曲線ヲ近似的ニ表ハシタモノデアアル。 $y = \frac{1}{x}$ ナル変換デ A, B 型ハ夫々 A', B' 型ニ, 逆ニ A', B' 型ハ夫々 A, B 型ニナル。