



Title	Finsler ノ空間ニ於ケル運動方程式
Author(s)	穂刈, 四三二
Citation	全国紙上数学談話会. 1935, 65, p. 9-13
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74175
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

253. Finsler ノ空間ニ於ケル運動方程式

總 列 四 三 二 (北大)

L. Berwald ノ研究シタ Finsler ノ空間 (math. Zeit., 25, 1926) = 於ケル Bewegung ヲ規定スル Killing ノ方程式 (ノ拡張) トシテ M. S. Knebelman が Amer. Jour. of Math., 51, 1929 デ

$$g_{ik} \xi^k_{,j} + g_{kj} \xi^k_{,i} + \xi^k_{,m} g_{ij,k} + \xi^k_{,m} p^m g_{ijk} = 0$$

ヲ発表シテキル。元來 L. Berwald ノ方法ハ ausgezeichnetes Linienelement (a. L. ト略記スル) $p^i =$ ツイテ一次ノ positiv-homogene Funktion $F(x, p)$ = Variationsrechnung ヲ施シテ metrisch ナ Finsler ノ空間ヲ建設シタモノデアル。

1°) コノ方法ノ短所ハ Vektor ノ Parallelverschiebung = 對シテソノ長サが一様ニハ変化スル。コノ様ニ空間デ Bewegung ヲ論ズルコトハ余リニモ突飛スギハシナイデシヌカ。

2°) 今一ツ注意シナケレバナラナイコトハ Riemann 空間デハ Element ハ Koord. x^i ノミヲ有スルガ

Finslerノ空間デハ x^i ノ外ニソノ *Punkt* = *adjungieren* サレタ $a. L.$ p^i ガ存在スル。即チ (x, p) ノ組ガ *Element*デアイル。従ツテ x^i ガ固定サレテキルトキ;
 $p_1 \neq p_2$ デアアレバ *Element*トシテハ $(x, p_1) \neq (x, p_2)$ デアイル。Knebelmanハ x^i ノミノ *infinitesimale Transformation*

$$(1) \quad x^{-i} = x^i + \xi^i \delta t$$

ノモトデ *Bewegung*ヲ論ツテキルガ, 上ニ述ベタ意味カ
 ラスレバ x ト

p トノ *infinit. Transf.* = 對シテ論ズ
 ベキデアナイデセウカ。

コノ 1°) = 對シテハ E. Cartanノ建設シタ *metrisch*
 ナ空間ヲ用フレバヨイ。2°) = 對シテハコノデ x ト

p トノ
infinit. Transf. = 對シテ *Bewegung*ヲ考ヘテ
 見セウ。

中心 (x^i) = 於ケル p^i ノ *infinit. Transf.*ハ

$$(2) \quad \overset{*}{p}^i = p^i + C_j^i(x) \delta t$$

デア興ヘラレル。コノ $\overset{*}{p}$ ヲ x カラ $\bar{x}$ ニ移シテ $\bar{p}^i$ ガ得ラレタ
 トスレバ (1)ト(2)トカラ

$$(3) \quad \bar{p}^i = p^i + \left(C_j^i + \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} \right) p^j \delta t$$

コノ (1)ト(3)ヲ組合ハセタ *Transf.*ハ *infinitesimal*
 =ハ *Gruppe*ノ性質ヲ有スルコトハ直グヲカル。(1)ト(3)
 トノモトデア二次以上ノ項ヲステ、

$$\bar{g}_{ij}(\bar{x}, \bar{p}) = g_{ij}(x, p) + \left\{ \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \xi^k + \frac{\partial g_{ij}}{\partial p^k} \left(C_l^k + \frac{\partial \xi^k}{\partial x^l} \right) p^l \right\} \delta t$$

$$d\bar{x}^i = dx^i + \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} dx^j \delta t$$

デアルカラ

$$\begin{aligned} \bar{g}_{ij} d\bar{x}^i d\bar{x}^j &= g_{ij} dx^i dx^j + \left\{ \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \xi^k + \frac{\partial g_{ij}}{\partial p^k} \left(C_l^k + \frac{\partial \xi^k}{\partial x^l} \right) p^l \right. \\ &\quad \left. + g_{kj} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^l} + g_{ki} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^j} \right\} dx^i dx^j \delta t \end{aligned}$$

従ッテ第一 = 長サが invariant デアルタメハ

$$(4) \quad g_{ki} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^j} + g_{kj} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^i} + \xi^k \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + 2 C_{ijk} \left(C_l^k + \frac{\partial \xi^k}{\partial x^l} \right) p^l = 0$$

但シコト = p^i ハ Einheit = トツテオク。従ッテ $2 C_{ijk} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial p^k}$ 。

ξ^k ハ x ノ ミノ 函数 デアルカラ

$$\frac{\partial \xi^k}{\partial x^i} = \xi_{/i}^k - \xi^h I_{hi}^*{}^k$$

コレヲ (4) = 代入 シテ 整頓 スレバ

$$(5) \quad \xi_{i/j} + \xi_{j/i} + 2 C_{ijr} (\xi_{/o}^r + C_l^r p^l) = 0$$

然ルニ p^i ノ ミノ Transf. = 對シテモ 矢張り 長サが invariant デアレバナラナイカラ (2) カラ

$$(6) \quad \boxed{C_{ijr} C_l^r p^l = 0}$$

従ッテ (5) カラ

$$(7) \quad \xi_{i/j} + \xi_{j/i} + 2C_{ijr} \xi^r_{/0} = 0$$

コレヲノ條件ノモトデ *Wenkel* モ亦 *invariant* デアル
コトガ容易ニワカルカラ次ノ結果が得ラレル。

infinit. Transf. (1), (2), (3) が *Bewegung* デ
アルタメノ必要ニシテ且ツ充分ナル條件ハ $\xi^i_{/j}$ 及ビ $C^i_{/j}$ が夫
々 (7) 及ビ (6) ヲ満足スルコトデアル。

コノ (6) ト (7) ヲ用フレバ *Riemann* 幾何學ニ於ケル
Bewegung = 關スル定理ガ容易ニ *Finsler* ノ場合ニ拡張
サレル。特別ノ場合トシテ

系 1 x ノ *infinit. Transf.* = 對スル運動方
程式ハ (7) デアル。

系 2 p ノ *infinit. Transf.* = 對スル運動方
程式ハ (6) デアル。

Riemann ノ場合ニハ $C_{ijk} \equiv 0$ デアルカラ (6) 式ハ
恒等的ニ満足サレ、(7) 式ハ

$$\xi_{i/j} + \xi_{j/i} = 0$$

トナツテ所謂 *Killing* ノ方程式トナル。又 $C^i_{/j}$ が

$$(8) \quad C^i_{/j} = P(x) \delta^i_j$$

ナル *Form* ヲトルトキハ (6) 式ハ C_{ijk} ノ性質カラ恒等的
ニ成立スル。(8) ノ幾何學的意義ハ中心 x = 於ケル $\alpha \cdot L$ ヲ
廻轉セズニ、ソノ長サノミヲ變ズルコトデアル。従ッテ (6)

ノ恒等的 = 成立スレコトハ當然ノコトデアル。

Finsler ノ空間ノ一般化サレタ河川空間 = 對シテモ、
同様ノ結果が得ラレル。コレハ後日述べサセテモラウコトニ
スル。