



Title	代數方程式ノ根ノ絶對値ニツイテ, II
Author(s)	角谷, 靜夫
Citation	全国紙上数学談話会. 1935, 65, p. 13-17
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74176
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

254. 代數方程式ノ根ノ絶對値=ツイテ, II

角 谷 靜 夫 (阪大)

244 = 於テ述ベタコトヨリ

$$\rho_1 \leq \rho_2 \leq \cdots \leq \rho_n \leq \rho_{n+1} \leq \cdots \leq \sqrt{2}$$

$$\rho_1 = 1, \quad \rho_2 = \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{2}-2}} = 1.098 \cdots$$

ナルコトがワカツタ。今

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = P$$

トオケバ、コレハ 244ノ條件 (2)ヲ満足スルアレユル代數方程式 ($n=1, 2, \cdots$)ノ根ノ絶對値ノ上限デアル。コノ P ノ大キサヲ求メルノが今回ノ目的デアル。

先ツ

$$\rho_n = P \quad n \geq 6 \cdots \cdots (9)$$

$$\text{即チ} \quad \rho_6 = \rho_7 = \rho_8 = \cdots \cdots (10)$$

ナルコトヲ示サユ。

コノタメニ

$$\Re\left(\frac{1-\xi^k}{1-\xi^l}\right) = 0 \quad k > l \quad \cdots \cdots (11)$$

ヲ満足スル ξ ノ絶対値ノ下限ヲ $\gamma_{k,l}$ トオク。

$$\frac{1}{\rho_n} = \min_{1 \leq k, l \leq n+1} \gamma_{k,l} \quad \cdots \cdots (12)$$

デアル。

前号ノ結果ヨリ

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{2,1} &= 1, & \gamma_{3,1} &= \sqrt{\frac{7}{8}} = 0.9354 \cdots \cdots \\ \gamma_{3,2} &= \sqrt{2\sqrt{2}-2} = 0.9101 \cdots \cdots \end{aligned} \right\} (13)$$

が得ラレル。

(11)ハ右ノ圖ニ於テ
 $AE \perp BE$ ナルコトヲ意
 味スルカテ O ヨリ AE ,
 BE = 下シタ垂線ノ足
 ヲ夫々 A' , B' トスレバ

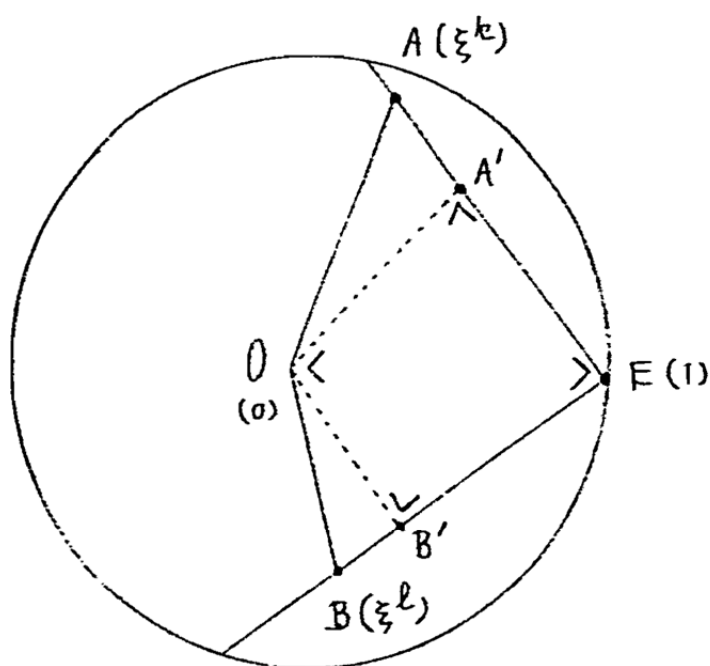
$$\begin{aligned} \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 &\geq \overline{OA'}^2 \\ &+ \overline{OB'}^2 = 1 \end{aligned}$$

トナル。即チ

$$\gamma_{k,l}^{2k} + \gamma_{k,l}^{2l} \geq 1 \quad \cdots \cdots (14)$$

コレヨリ, 例ヘバ

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{4,1} &> 0.8411 \\ \gamma_{5,1} &> 0.8689 \end{aligned} \right\}$$



$$\left. \begin{array}{l} r_{6,1} > 0.8820 \\ r_{7,1} > 0.8924 \end{array} \right\} \text{-----} (15)$$

ヲ得ル。

一オ (11) = 於テ $k=5, l=1$ トオケル

$$R(1+\xi+\xi^2+\xi^3+\xi^4)=0$$

$$\xi = r e^{i\theta}, \theta = \frac{\pi}{3} \text{ トオケル}$$

$$1 + \frac{r}{2} - \frac{r^2}{2} - r^3 - \frac{r^4}{2} = 0 \text{-----} (16)$$

$r = 0.898$ = 對シ = (16)ノ左辺ハ < 0 トナルカラ $r_{5,1} < 0.898$
ナルコトガワカル。

然ルニ

$$(0.898)^6 + (0.898)^8 < 1$$

$$(0.898)^4 + (0.898)^{10} < 1$$

$$(0.898)^2 + (0.898)^{16} < 1$$

デアルカラ (14)ヲ用フレバ

$$r_{p,q} > 0.898 > r_{5,1} \text{-----} (17)$$

ガ $p \geq 4, q \geq 3; p \geq 5, q \geq 2; \text{又ハ } p \geq 8, q \geq 1$
= 對シテ成立スル。

故 = (13) 及ビ $r_{4,2} = \sqrt{r_{2,1}} = 1$ ナルコト = 注意スレ

バ

$$\frac{1}{P} = \frac{1}{P_6} = \min(r_{4,1}, r_{5,1}, r_{6,1}, r_{7,1})$$

ナルコトガワカル。

次 = 更 = 精密 =

$$\frac{1}{P} = \min(r_{5,1}, r_{6,1}, r_{7,1}) \dots\dots\dots (18)$$

ナルコトヲ示サユ。コノタメニハ $r_{4,1} > 0.898$ ナルコトヲ示セバヨイ。ソレニハ

$$\Re(1 + \xi + \xi^2 + \xi^3) = 0 \dots\dots\dots (19)$$

が $|\xi| \leq 0.9$ ナル成立シナイコトヲ示セバ十分デアル。

$\xi = re^{i\theta}$ トオケバ (19) ハ

$$F(r, \theta) \equiv 1 + r \cos \theta + r^2 \cos 2\theta + r^3 \cos 3\theta = 0$$

$\cos \theta = \alpha$ トオケバ

$$F(0.9, \theta) \equiv f(\alpha) \equiv 1 + 0.9\alpha + 0.81(2\alpha^2 - 1) \\ + 0.729(4\alpha^3 - 3\alpha)$$

$$= 2.916\alpha^3 + 1.62\alpha^2 - 1.287\alpha + 0.19$$

コレノ $|\alpha| \leq 1$ = 於ケル最小値が > 0 ナルコトヲ云ヘバヨイ。

先づ極小値ヲ求メル。 α^3 ノ係數ハ正デアルカラ

$$f'(\alpha) \equiv 8.748\alpha^2 + 3.24\alpha - 1.287 = 0$$

ノ根ノミチ大キイ方

$$\alpha_1 = \frac{13}{54}$$

= 對スル $f(\alpha)$ ノ値

$$f\left(\frac{13}{54}\right) = \frac{398}{27000} = 0.01474 \dots\dots\dots$$

が極小値デアル。

$$f(-1) = 0.181 > 0, \quad f(1) = 3.439 > 0$$

デアレカラ証明ハ完結スル。

結局 (15), (17), (18) ヨリ次ノ結果ヲ得ル。

$$0.8689 < \frac{1}{P} < 0.898$$

又ハ

$$1.1135 < P < 1.1509$$