



Title	函数方程式 $f(x+y)+F(x-y)=2\{F(x)+F(y)\}$ ノ解ニツイテ
Author(s)	北川, 敏男
Citation	全国紙上数学談話会. 1935, 65, p. 17-20
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74177
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

255. 函数方程式 $F(x+y)+F(x-y)=2\{F(x)+F(y)\}$
 の解 = ツイテ

北川 敏男 (阪大)

1. 南雲教授が、筆者 = , 次ノマウナ御話シガアツタノ
 ヲ機縁 = , 表題ノ函数方程式ヲ変數ガ実數ノ場合 = 就イテ考
 ヘテ見マシタ。ソノ御話シトイフノハ

"Neumannガ、Linear metric spaceヲNorm
 ガ定義サレテキルトキ

$$\| \xi + \Delta \|^2 + \| \xi - \Delta \|^2 = 2\{ \| \xi \|^2 + \| \Delta \|^2 \}$$

ガ成立スルコトガ内積 (ξ, Δ) ヲ Hilbert space = 於ケル
 如ク定義シウルタメノ必要且ツ充分ノ條件デアルトイフ結果
 ヲ得テキル。" (Annals of Math. Vol. 36, No. 3 参照)

2. 今任意ノ實數 x, y = 對シテ

$$F(x+y)+F(x-y)=2\{F(x)+F(y)\} \text{-----}(1)$$

ヲ満たス函数 $F(x)$ ヲ考ヘル。 如何ナル点ノ近傍ガモ

Lebesgueノ意味デ可測デナイ $F(x)$ デ (1) が満足サ
レ得ルヲトハ、函数方程式

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

ノ Hamelノ解ヲ $f(x)$ トシテ $F(x) = \alpha f(x)^2$ ト置ケバ
ヨイ。

從ツテ或ル有限區間デ Lebesgueノ意味デ可測ト解ヲ
求メテ見ルコトが意味ガアル。

今主張ニ反シテ、或ル有限區間デ有界デナイトスル。從
ツテ一ノ点 x_1 ガアツテ、ソノ任意ノ近傍ニ於イテ $F(x)$ が有
界デナイトシテヨイ。然ラバ任意ノ正数 n, ε ニ對シテ

$$\begin{cases} |h| < \varepsilon \\ |F(x_1+h)| > n \end{cases}$$

ナル如キ h ガアリ、與ヘラレタ函数方程式カラ

$$|F(x_1+h+y) + F(x_1+h-y)| > n + \delta$$

ヲ得ル。コノ式カラ

$$\begin{aligned} \text{mes} \int_x \left\{ |F(x)| > \frac{n+\delta}{2}; x_1-a, x_1+a \right\} \\ > \delta - \varepsilon (> 0) \end{aligned}$$

ナルコトガ容易ニヲカル。 $n \rightarrow \infty$ トナルコトニヨツテ矛
盾。

定理. (1)ヲ充ス Lebesgue可測ナル解ハ

$$F(x) = ax^2 \quad (a \text{ハ任意ノ實數})$$

ガ與ヘラレル。

証明. 補助定理3 = 由リ任意ノ有限區間ヲ有界ニシテ
且ツ可測ナルコトカラ、任意ノ有限區間ヲ Lebesgue 可積
分トナル。從ツテ補助定理1ノ証明ト同様ニシテ $F(x)$ ハ連
続。從ツテ(3) = ヨリ $F_1(u)$ ハ連続微分可能ガカラ、(4)
式 = ヨリ $F(x)$ ノノモノが連続微分可能。(1) カラ

$$F'(x+y) + F'(x-y) = 2F'(x)$$

$$F'(x+y) - F'(x-y) = 2F'(y)$$

ヲ得、從ツテ連続函数 $F'(x)$ ハ

$$F'(x+y) = F'(x) + F'(y)$$

ナル函数方程式ヲ充ス。故ニ $F'(x) = a, x$

依ツテ $F(x) = ax^2$

3. 補助定理1. (1)ヲ充ス $F(x)$ が殆ンド到ルトコロ
テ零ナラバ $F(x)$ ハ恒等的ニ零デアアル。

証明. $F(x)$ が殆ンド到ルトコロテ零ガカラ、 $F(x)$
ハ任意ノ有限區間ヲ Lebesgue 可積分デアアル。

(1)ノ両辺ヲ y = 関シテ次ノ如ク積分スル:

$$\int_0^u F(x+y) dy + \int_0^u F(x-y) dy = 2F(x)u \\ + 2 \int_0^u F(y) dy \dots\dots\dots (2)$$

今簡單ノ $x =$

$$\int_0^u F(t) dt = F_1(u) \dots\dots\dots (3)$$

ト置ケバ

$$F_1(x+u) - F_1(x-u) = 2uF(x) + 2F_1(u) \text{-----} (4)$$

(4)ノ右辺ハ、 x ノ連続函数ガカラ、 $F(x)$ ガ又然リ。依ツテ $F(x)$ ハ恒等的ニ零デアイル。

補助定理2. (1)ノ解 $F(x)$ ガ有限區間 $[0, A]$ デ Lebesgueノ意味デ可測デアレバ任意ノ區間デ又然リ。

証明. コノコトハ (1)式ヨリ得ラレル次ノニ式ニ依リ明ラカデアイル。

$$F(2x) = 4F(x)$$

$$F(-x) = F(x)$$

補助定理3. (1)ノ解ガ、若シ $[0, A]$ デ Lebesgueノ意味デ可測デアレバ、任意ノ有限區間デ有界デアイル。

証明. コレニ関シテハ、S. Kaczmarz (Fundamenta VI)ノ方法ヲ modify スレバヨイ。乃チ、

(1)ノ解ニシテ殆ンド到ルトコロ零ナルモノハ、補助定理1ニヨリ恒等的ニ零トナルカラ則チ已ム。然ラザルトキニハ、適當ナ區間 $(-a, a)$ ガアツテ

$$\text{mes } E_x \{ F(x) > \delta; -a \leq x \leq a \} > 0$$

ナル如キ正數 δ, a ガアイル。ニレハ若シ要スレバ、 $F(x)$ ノ代リニ、 $-F(x)$ ヲ考ヘルコトニヨリ常ニ充サレル。