



Title	ぼれる集合論ニ於ケル分離ノ原理ニ就テ
Author(s)	酒井, 政雄
Citation	全国紙上数学談話会. 1935, 65, p. 24-31
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74180
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

258. ぼれる集合論 = 於ケル分離ノ原理 = 就テ

酒井政雄(北大)

分離ノ原理ハ解析集合論 = 於ケル最も基本的ナ定理ノ一ツデアール。コノ原理ハ最近 Novikott, Liapounott 及 Lusiu 等 = ヨリ "separabilité multiple" (定義 / 参照) ノ場合 = 拡張サレタ。然ラバ, Borel 集合論 = 於ケル分離ノ原理ガ同様ノ拡張ヲ許スカドウカ? —— = 就イテ Sierpiński: Sur la separabilité multiple des ensembles mesurables B. Fund, Math. t. 23 pp. 292 — 303 = 於テソノ大部分ハ肯定的ノ結

果が成ラレヌ。然シ可附番無限ノ場合ノ第二分離ノ原理
 (ばれル集合論ニ於ケル) (定義2参照) ハ同氏ニヨツテモ
 取扱ハレズ、尚ソ、上、同論文ノ終リ及ビ *Ruziewicz*:
Sur la séparabilité multiple des ensembles,
Fund. Math. t. 24, pp. 199—205ノ初メニ、カ
 カル場合ヘノ拡張ハ不可能デアルト云ツテイル。之レハ何カ
 ノ誤解デアラウ。(多ク *Liapounoff* Disノ條件ノ下
 ニテ不可能デアルト云フ意味デアラウ)。何トナレバ、以下
 証明スルヤウニ、コノ場合ヤハリ定理ハソノママ成立スルカ
 ラデアイル。

定義1.

点集合 K ノ部分集合ノ集合ヲ重トスル。

1°. *Lusin* ノ第一分離ノ原理: $E_1, E_2 \in \mathfrak{A}$, $E_1 E_2 = 0$
 ナルトキ, $H_1, H_2, K - H_1, K - H_2 \in \mathfrak{A}$, $H_1 \supset E_1, H_2 \supset E_2$,
 $H_1 H_2 = 0$ ナル H_1, H_2 が存在スル。

2°. *Novikoff* ノ分離: $E_1, E_2, \dots, E_m \in \mathfrak{A}$,
 $E_1 \dots E_m = 0$ ナルトキ $H_1, \dots, H_m$ が存在シテ, H_i ,
 $K - H_i \in \mathfrak{A}$, $H_i \supset E_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$), $H_1 H_2 \dots H_m = 0$
 トナル。

3°. *Liapounoff* ノ分離: $E_1, E_2, E_3, \dots \in \mathfrak{A}$
 (可附番無限個)., $E_1 E_2 E_3 \dots = 0$ ニ對シテ H_1, H_2 ,
 $H_3, \dots$ が存在シテ $H_i, K - H_i \in \mathfrak{A}$, $H_i \supset E_i$, ($i =$
 $1, 2, 3, \dots$) 且ツ $H_1 H_2 H_3 \dots = 0$ トナル。

4°. *Liapounott* / bis 分離: $E_1, E_2, E_3, \dots \in \mathfrak{E}$,
 $\lim E_m = 0$ = 對シテ $H_1, H_2, H_3, \dots$ が存在シテ, H_i ,
 $K - H_i \in \mathfrak{E}$, $H_i \supset E_i$, ($i = 1, 2, 3, \dots$) 且シ $\lim H_m = 0$
 トナル。

定義 2.

1°. *Lusin* / 第二分離原理: $E_1, E_2, \dots \in \mathfrak{E}$ = 對シ
 テ, H_1, H_2 が存在シテ, $K - H_1, K - H_2 \in \mathfrak{E}$, $H_1 \supset E_1 - E_2$,
 $H_2 \supset E_2 - E_1$, $H_1 H_2 = 0$ トナル。

2°. *Lusin* / 第二分離原理 / 拡張: $E_1, E_2, \dots, E_m$
 $\in \mathfrak{E}$ = 對シテ, $H_1, H_2, \dots, H_m$ が存在シテ $K - H_i \in \mathfrak{E}$,
 $H_i \supset E_i - (E_1 E_2 \dots E_m)$, ($i = 1, 2, \dots, m$) 且 $H_1 H_2 \dots H_m$
 $= 0$ トナル。

3°. 可附番無限ノトキノ第二分離原理: 可附番無限個
 $E_1, E_2, E_3, \dots \in \mathfrak{E}$ = 對シテ $H_1, H_2, H_3, \dots$ が存
 在シテ, $K - H_i \in \mathfrak{E}$, $H_i \supset E_i - (E_1 E_2 E_3 \dots)$, ($i = 1, 2,$
 $3, \dots$) 且ツ $H_1 H_2 H_3 \dots = 0$ トナル。

定理. *Metric space* = 於テ $\mathfrak{E} \neq \emptyset$ ($1 \leq \alpha < \aleph$)
 次ノ *multiplicative* / *Borel* 集合トスル。コノ $\mathfrak{E}$ =
 ツイテ可附番無限ノ場合ノ第二分離原理が成立スル。尚、同
 時ニ $E_1 E_2 \dots = 0$ ナラバ *Liapounott* / 分離原理が
 成立スル。

証明.

$\mathfrak{E} \neq \emptyset$ 次ノ *ambigu* / *Borel* 集合トスルト, $\mathfrak{E}$ ハ

Körper $\mathfrak{A}$ ナルノデ、 $\mathfrak{A}$ $\mathfrak{K}$ Körper トシ、 $\mathfrak{A} \ni E_1, E_2, \dots$
 ノトキ。 $\mathfrak{A} \ni H_1, H_2, \dots$ が存在シテ 映ヘラレタ性質ヲモ
 チ、且ツ $E_1 E_2 E_3 \dots = 0$ ナラバ、此処ニ 映ヘタ $H_1, H_2, \dots$
ハ同時ニ $\in \mathfrak{A}$ トナルコトヲ 証明スル。

H_i ニツキ —— $\mathfrak{A} \ni E_1, E_2, \dots$ ナルコトト、 $\mathfrak{A}$ が
 Körper ナルコトニヨリ

$E_i = E_i' E_i^2 E_i^3 \dots, E_i^u \supset E_i^{u+1}, E_i^u \in \mathfrak{A}, i, u = 1, 2, 3,$
 トシテヨイ。コノトキ

$$F_i^u = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} E_j^u$$

トオク。コノトキ、 F_i^u ハ $F_i^u \in \mathfrak{A}, F_i^u \supset F_i^{n+1}$ トナル。扱テ

$$(1) \quad H_i = E_i' (K - F_i') + E_i^2 (F_i' - F_i^2) + \dots \quad \text{トスル。}$$

之レガ求メル $H_i, i = 1, 2, \dots$, デアル。

Klass = ツキ。—— $\mathfrak{A}$ Körper ナルニエ (1) ノ
 右辺ノ各項ハ $\mathfrak{A}$ ニ属ス。ヨツテ $H_i \in \mathfrak{A}$ 、即チ $K - H_i$
 $\in \mathfrak{A}$ 。

$$E_1 E_2 E_3 \dots = 0 (\wedge \in \mathfrak{A} \mathfrak{A}) \quad \text{ノトキハ}$$

$$K \supset E_i' \supset E_i' F_i' \supset E_i^2 F_i' \supset E_i^2 F_i^2 \supset \dots \supset (E_i^2 E_i^3 \dots) = 0. \quad \text{ナルニエ。 (次ノ※参照)}$$

$$K - H_i = (K - E_i') + F_i' (E_i' - E_i^2) + F_i^2 (E_i^2 - E_i^3) + \dots$$

..... コノ式ノ右辺ノ各項ハ $\mathfrak{A}$ ニ属スルカラ、 $K - H_i \in \mathfrak{A}$
 ヨツテ $H_i \in \mathfrak{A}$

$$H_i \supset E_i - (E_1 E_2 \dots) = \text{ツイテ} \quad E_i^n \supset E_i, E_i^n \supset E_i^{n+1}$$

及ビ F_i^n 及 F_i^{n+1} ヲ用ヒテ (1) ヲリ

$$H_i \supset E_i (K - F_i') + E_i (F_i' - F_i^2) + \dots$$

$$= E_i [K - (F_i' F_i^2 F_i^3 \dots)]$$

$$= E_i - E_i \times (F_i' F_i^2 F_i^3 \dots)$$

$$= E_i - (E_i' E_i^2 E_i^3 \dots) \quad *$$

$$(E_2' E_2^2 E_2^3 \dots) E_i \times F_i' F_i^2 \dots$$

$$(E_3^2 E_3^3 \dots) = E_1 E_2 E_3 \dots$$

トナルコト。

$$(E_i' E_i^2 \dots E_i^{i-1} E_i^i \dots)$$

$$= E_i - (E_i' E_i^2 E_i^3 \dots)$$

$$(E_2' E_2^2 E_2^3 \dots)$$

$$(E_3' E_3^2 E_3^3 \dots)$$

$$(E_i' E_i^2 E_i^3 \dots)$$

$$= E_i - (E_i E_2 E_3 \dots)$$

$$H_1 H_2 H_3 \dots = 0 \text{ ヲツイテ } \text{---} \text{モシ } H_1 H_2 \dots \neq 0$$

ナラバ共通部分 = 一点 ナルヲトル。 $H_i \ni p$ ナルユエ, (1) 式デ

$i=1$ ニシテ見ルト。 $n \geq 1$ が存在シテ $E_i^n (F_i^{n+1} - F_i^n) \ni p$.

但シ F_i^0, E_i^0 等ハ凡テ $K = \text{トル}$ 。依ツテ

$$(2) \quad E_i^n \ni p, F_i^{n+1} \ni p, F_i^n \ni p$$

(2) ノ第一式ト $E_i^{n+1} \supset E_i^n$ トヨリ, $E_i^{n+1} \ni p$.

(2), 第二式ト F_j^{n-1} / 定義 = ヲリ $E_j^{n-1} \ni p, j=2, \dots$
 $\dots, n$, 依ッテ F_i^{n-1} / 定義 = ヲリ $F_i^{n-1} \ni p, i=1, 2, 3, \dots$
 又 F_k^m / 單調性 = ヲリ

$$(3) \quad F_i^0 \supset F_i^1 \supset F_i^2 \supset \dots \supset F_i^{n-1} \ni p, i=1, 2, 3, \dots$$

(2), 第三式 = ヲリ k ($K \leq n+1$) が存在シテ $E_k^n \ni p$.

E_i^m / 單調性 = ヲリ

$$(4) \quad E_k^n \supset E_k^{n+1} \supset E_k^{n+2} \supset \dots \ni p$$

極テ (1) = ヲリ

$$H_k = \sum_{m=1}^{n-1} E_k^m (E_k^{m+1} - F_k^m) + \sum_{m=n}^{\infty} E_k^m (F_k^{m+1} - F_k^m)$$

コノ式ノ右辺ノ第一項ハ (3) = ヲッテ p ヲ含マズ, 第二項ハ
 (4) = ヲッテ p ヲ含マズ. 依ッテ $H_k \ni p$. 之ハ p ノ定義 = 反
 スル。

依ッテ $H_1, H_2, H_3, \dots = 0$ トナル。

(証明了)

尚上述ノ *Ruziewicz* ノ論文デハ,

至ル *Ring* デ *Lusin* ノ第二公理原理が成立スルト
 キハ、*Lusin* ノ第二公理原理ノ拡張 (定義 2, 2°) が
 成立スル。

トイフコトが面白い方法デ証明サレテキルが、次ノ如ク
Novikott ノ証明法 = ヲッテモ証明サレル。念ノタメ
 記シテオキマス。コノ方が遙カニ簡單デアルト思ヒマス。

証明.

$m=2$ ノトキハ、*Lusin*ノ第二分離原理デ、コレハ假定ニヨツテ成立スル。 $(m-1)$ ケノトキ成立スルトキ m 個ノトキモ成立スルコトヲ示セバヨイ。

E_1, E_2 ニツキ、 K_1, K_2 が存在シテ

$$K_1 \supset E_1 - (E_1 E_2), \quad K_2 \supset E_2 - (E_1 E_2)$$

$$K_1 K_2 = 0, \quad K_1, K_2 \in \Phi_C$$

$(m-1)$ 個ノ $(E_1 E_2), E_3, \dots, E_m$ ニツキ $L_0, L_3, \dots, L_m$ が存在シテ

$$L_0 \supset (E_1 E_2) - (E_1 E_2 \dots E_m)$$

$$L_3 \supset E_3 - (E_1 E_2 \dots E_m), \dots, L_m \supset E_m - (E_1 E_2 \dots E_m)$$

$$L_0 L_3 \dots L_m = 0, \quad L_0, L_3, \dots, L_m \in \Phi_C.$$

此処デ、 $H_1 = K_1 + L_0, H_2 = K_2 + L_0, H_3 = L_3, \dots, H_m = L_m$ トスル。

Φ ガRingナル工エ、 Φ_C モ亦Ringデアル。依ツテ H_1, H_2 , 及ビ $H_3, H_4, \dots, H_m$ ハ凡テ Φ_C 。

$$\begin{aligned} H_1 &= L_0 + K_1 \supset (E_1 - (E_1 E_2)) + ((E_1 E_2) - (E_1 \dots E_m)) \\ &= E_1 - (E_1 \dots E_m) \end{aligned}$$

H_2 モ同様。 $H_3, \dots, H_m$ ハ $L_3, \dots, L_m$ ト同ジモノナル工エ、又ハリ同ジ様ナ式が成立スル。

$$\begin{aligned} H_1 H_2 \dots H_m &= (L_0 + K_1)(L_0 + K_2) L_3 \dots L_m \\ &= L_0 L_3 \dots L_m + K_1 K_2 L_3 \dots L_m = 0 \end{aligned}$$

(以上)

日本學士院記事(1934)第9号ノ功力先生ノ論文ニヨリ

マスト、任意ノ *metric space* = 於ケル解析集合ハ *Lusin*
ノ第二分離原理ヲ充スコトが証明サレテイマスカテ、上ノ結
果ヨリ次ノコトが言ヘマス。

任意ノ *metric space* = 於ケル解析集合 $E_1, E_2, \dots$
 $\dots E_m =$ 對シテ、補解析集合 $H_1, H_2, \dots, H_m$ が存在
シテ

$$H_i \supset E_i - (E_1 E_2 \dots E_m), \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$H_1 H_2 \dots H_m = 0$$

トナル。