



Title	函数方程式 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n = 0$ $f(z + e^{2v\pi/n} \cdot i\zeta) = nf(z)$ ニ就イテ
Author(s)	角谷, 静夫; 南雲, 道夫
Citation	全国紙上数学談話会. 1935, 66, p. 10-12
Version Type	VoR
URL	<a href="https://doi.org/10.18910/74189">https://doi.org/10.18910/74189</a>
rights	
Note	

*The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

$$267. \text{ 函数方程式 } \sum_{\nu=0}^{n-1} f(z + e^{\frac{2\nu\pi}{n}i} r) = n f(z)$$

= 就イテ

角谷静夫, 南雲道夫 (阪大)

( $x, y$ ) 平面ヲ定義サレタ連続函数  $f(x, y)$  デ, 次ノ性質ヲ有スルモノハ何カ?

“  $P$  ヲ ( $x, y$ ) 平面ノ任意ノ一点トシ,  $P$  ヲ中心トシテ任意ノ半径  $r$  デ円ヲ画キ, ソノ周ヲ  $n$  等分スル  $n$  個ノ点ヲ  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  トスル時,

常 =

$$f(P) = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n f(Q_{\nu}). ”$$

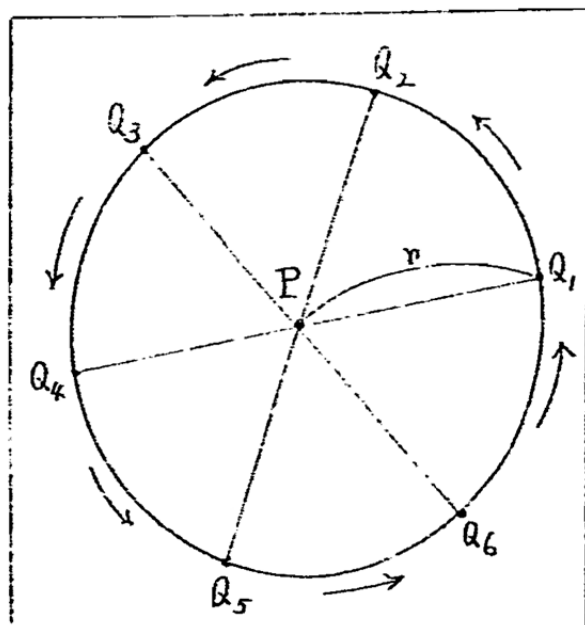
今 ( $x, y$ ) 平面ノ点ヲ複素数ヲ用ヒテ表ハセバ, 此ノ問題ハ “函数方程式

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} f(z + \omega^{\nu} r) = n f(z)$$

$$\left[ \omega = e^{\frac{2\pi i}{n}} \right]$$

ヲ解ケ” ト云フコトニナル。但シ  $f(z)$  ハ實数值ヲ取ルモノトスル。

先ヅ  $r = r e^{i\theta}$  トシテ,  $\theta = \text{ツキ} 0$  カラ  $\frac{2\pi}{n}$  マデ積ムスレバ



$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \int_0^{2\pi} f(z + \omega^\nu r e^{i\theta}) d\theta = \int_0^{2\pi} f(z + r e^{i\theta}) d\theta$$

ナレヨリ

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + r e^{i\theta}) d\theta = f(z).$$

所ガ  $r \in \mathbb{R}$  任意ナルカラ  $f(z)$  ハ  $(x, y)$  , 調和函数 ナル。従ツテ

$$f(z) = \mathcal{R}\{F(z)\}$$

ナル正則函数  $F(z)$  が存在スル。故ニ

$$\mathcal{R}\left\{ \sum_{\nu=0}^{n-1} F(z + \omega^\nu \zeta) - nF(z) \right\} = 0.$$

之ハ  $(z, \zeta)$  , 正則函数ノ實数部分ナルカラ

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} F(z + \omega^\nu \zeta) - nF(z) = iC \quad (C \text{ ハ 實數}).$$

$\zeta = 0$  トスレバ,  $C = 0$  . 即チ

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} F(z + \omega^\nu \zeta) = nF(z).$$

$F(z + \omega^\nu \zeta)$  ヲ  $\zeta$  ,  $\Gamma$  級数 (Beziehungsreihe) = 展開シテ  
両辺ヲ比較スレバ,

$$\frac{d^n}{dz^n} F(z) = 0,$$

ヲ得ル。故ニ  $F(z)$  ハ 高々  $n-1$  次ノ有理整函数ナル。

従ツテ

$$f(z) = \mathcal{R}\{a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_n\}.$$

之が解ナルコトハ明ラカデアロ。

以上ハ何処カノ教科書ノ演習問題ニデモアリソウナ問題  
デ、新ラシイ研究トシテ発表スベキ程ノモノデモナサ相ニモ  
思ハレル。

次ニ此ノ問題ト見掛ケが同ジマウナ幾何学的ナ問題ヲ提  
出シテ諸侯ノ御教示ヲ仰ガタイ。

即チ Spherometer トイフ器械ハれんずノ如キ球  
面ノ曲率半径ヲ見出スモノデアアルガ、之ハ正三角形ノ頂点ニ  
尖ツタ脚先ガアリ、ソノ重心ニ於ケルソノ面（正三角形ヲ含  
ム平面）ノ垂直線トシテ動く点ノ位置（点ガれんずニ触レル位  
置ガ平面カラノ距離ヲ知ル）ニヨツテ曲率ヲ計算スルモノデア  
アル。ソコデ今コノ器械ヲ或ル曲面上ノ何処ニ置イテモ、ソ  
ノ曲率が零トシテ計ラレルトキハ、果シテコノ曲面ハ平面デア  
ラウカ？ 幾何学的ニイヘバ、曲面上ノ三点ガ正三角形ノ  
頂点ナルトキ、ソノ重心モ亦必ず曲面上ニアレバ、コノ曲面  
ハ平面デアロウカ？ 但シ正三角形ノ辺ノ長サハ一定ナル場  
合、及ビ之レガ任意ノ場合トニツノ相異ナル問題ヲ生ズル。  
此ノ問題ハ更ニ種々ニ擴張サレルデアロウ。

—— 以上 ——