



Title	距離付ケラレタ環ニ於テ閉ヂタ連續群
Author(s)	吉田, 耕作
Citation	全国紙上数学談話会. 1935, 68, p. 1-9
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74202
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

280. 距離付ケラレタ環 = 於テ開ヲタ連續群

吉田耕作 (阪大)

第58号 (論文203) = 於テ南雲氏ハ「連続ナ環」ヲ定義シ次イデコト = *einbetten* シタ *one-parameter group* , *analytical representation* ヲ興ヘラレタ。筆者ハ以下ニ

J. von Neumann: Über die analytischen Eigenschaften von Gruppen linearer Transformationen und ihrer Darstellungen M. Z. 1929.

H. Cartan: Sur les groupes de transformations analytiques (Actualités 198)

ノ論法ヲ助ケトシテ稍: 一般ニ表題ノ如キ議論ヲシテミタイト思ヒマス。其ノ *idée* = 於テ Neumann ト異ナル所ハナイノデスガ i) Neumann ノ *Matrix* = 関スル議論ハ結局距離付ケラレタ *vollständig* ナ *Ring* = 於テ開ヲタ有限次元ノ連續群ノ話ナルコトが明ニナリ ii) 斯カル群 = 於ケル *differentiability at Einselement* ヲ Cartan ノ *propriété (P)* = 倣ッテ定義スレバ南雲氏ノ如キ *abstract* ナ微分方程式 = ヨツテ群ヲ *erzeugen* シ得ルコトが云ヘル iii) *Fundamental theorem* (以下ニ述ベル) ノ証明ハ上ノ微分方程式ノタメニ Neumann

ノヨリモワカリヨクナツテヲリマス。之レダケヲ注意シテオ
キタイト思ヒマス。

I 準備

南雲氏「連続ノ環」ヲ距離ヅケラレタ環ト呼ガコト=
シマス、即チ實数ヲ *Operatorbereich* トシ *metric* 且ツ
vollständig ノ環。但シ以下ニハ此ノ環 = *Einheit* (其
絶対値 1) ノ存在ヲ假定シマス。然ラバ此ノ *Ring* R = 於
テ (絶対収斂 = ヨリ)

$$\exp. A = E + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A^{\nu}}{\nu!} \quad \text{for all } A \in R$$

$$\ln. A = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} (A-E)^{\nu} \quad \begin{array}{l} \text{for all } A \in R \\ \text{for which } |A-E| < 1 \end{array}$$

ガ定義サレル。

Neumann ガ *Matrix* = 對シテ定義シタ $\exp.$ & $\ln.$
ト同シ論法デ (17 級数トノ比較)

$$(1) \exp. \ln. A = A \text{ for } |A-E| < 1$$

$$(2) \ln. \exp. A = A \text{ for } |A| < \ln. 2$$

$$(3) \exp. A = E + A + O(|A|^2) \text{ for } |A| \text{ small}$$

$$(4) \ln. A = A - E + O(|A-E|^2) \text{ for } |A-E| \text{ small}$$

ガ云ヘマス。コノ $O(|A|^2)$ 或ハ $O(|A-E|^2)$ ハ夫々 コノ
order ノ絶対値ヲモツ如キ R ノ *element* ノ意。

定理 I. $A_{\varepsilon_i} \in R$, $A_{\varepsilon_i} \rightarrow E$ for $i \rightarrow \infty$. 且 $0 < \varepsilon_i$,

$\varepsilon_i \rightarrow 0$ for $i \rightarrow \infty$ トスル。然ラバ

$$\frac{A_{\varepsilon_i} - E}{\varepsilon_i} \rightarrow \frac{\ln. A_{\varepsilon_i}}{\varepsilon_i}$$

トハ同時ハ $\mathcal{R}$, 同一, element = 収斂スル。

証明.

$$\frac{1}{\varepsilon_i} \ln. A_{\varepsilon_i} = \frac{1}{\varepsilon_i} (A_{\varepsilon_i} - E) + \frac{1}{\varepsilon_i} O(|A_{\varepsilon_i} - E|^2) \quad \text{by (4)}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_i} (A_{\varepsilon_i} - E) + \varepsilon_i O\left(\frac{1}{\varepsilon_i^2} |A_{\varepsilon_i} - E|^2\right)$$

$$\frac{1}{\varepsilon_i} (A_{\varepsilon_i} - E) = \frac{1}{\varepsilon_i} (\exp. \ln. A_{\varepsilon_i} - E) \quad \text{by (1)}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_i} (\ln. A_{\varepsilon_i} + O(|\ln. A_{\varepsilon_i}|^2)) \quad \text{by (3)}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_i} \ln. A_{\varepsilon_i} + \varepsilon_i O\left(\frac{1}{\varepsilon_i^2} |\ln. A_{\varepsilon_i}|^2\right)$$

カラ明カ。

定理 2. $\frac{1}{\varepsilon_i} (A_{\varepsilon_i} - E) \rightarrow U \in \mathcal{R}$ ナラバ $\mathcal{R} =$

$$n (A_n - E) \rightarrow U; \quad n = 1, 2, \dots$$

ナル如キ $\{A_n\}$ カ存在スル。然レ A_n ハ $\{A_{\varepsilon_i}\}$, 適當ナ
Teilfolge, Potenz = トレル。

証明. $\varepsilon_{i(n)} < \frac{1}{n}$ ナル $\varepsilon_{i(n)}$ ナトル。正整数 $q_{i(n)}$

ナ

$$(q_{i(n)} - 1) \varepsilon_{i(n)} < \frac{1}{n} \leq q_{i(n)} \varepsilon_{i(n)}$$

ナ満足スル如クトリ $B_{i(n)} = (A_{\varepsilon_{i(n)}})^{q_{i(n)}}$ トナケバ

$$n \ln. B_{i(n)} = n q_{i(n)} \ln. A_{\varepsilon_{i(n)}} = n q_{i(n)} \varepsilon_{i(n)} \left\{ \frac{1}{\varepsilon_{i(n)}} \ln. A_{\varepsilon_{i(n)}} \right\}$$

→ $1 \cdot U = U$ (by 定理1)

ヨツテ $A_n = (A_{\varepsilon_{i(n)}})^{g_{i(n)}}$ トヲイテ 定理1ヲ使ヘバヨイ。
($\log = \ln, A^m = m \ln. A$ ヲ使ツタ。之ハタヌスク証明出來ル。 m ハ正整数)

次 $= \mathcal{R}$, 部分集合 $\mathcal{O}_f$ が $\mathcal{R}$, 掛算ヲソノ *Compositionsregel* トシテ, $\mathcal{R}$ ノ *metric* , 意味デ連続群ヲ作ツテルトスル。 $\mathcal{O}_f$ ノ *Einheit* ハ先ノ E トスル。今

$\mathcal{O}_f \ni A_{\varepsilon_i}, \frac{1}{\varepsilon_i} (A_{\varepsilon_i} - E) \rightarrow U$ ノ如クシテ得ラレル $U \in \mathcal{R}$, 全体ヲ $\mathcal{U}$ トスル。

定理3. $\mathcal{U}$ ハ *linear manifold* $\subseteq \mathcal{R}$ デアリ, 且 U, V ト共ニソノ *commutator* $UV - VU$ ヲ含ム。

証明. $\frac{1}{\varepsilon_i} (A_{\varepsilon_i} - E) \rightarrow U, \frac{1}{\varepsilon'_i} (A_{\varepsilon'_i} - E) \rightarrow V$ トセヨ。

然ラバ $\mathcal{O}_f$ 内ニ $n(A_n - E) \rightarrow U, n(A'_n - E) \rightarrow V$ ナル如キ $\{A_n\}, \{A'_n\}$ が存在スル。(定理2)

$$\begin{aligned} n(A_n A'_n - E) &= n(A_n - E) + n(A'_n - E) + n(A_n - E)(A'_n - E) \\ &= n(A_n - E) + n(A'_n - E) + \frac{1}{n} \{n(A_n - E) \cdot n(A'_n - E)\} \rightarrow U + V \end{aligned}$$

$$\begin{cases} n^2(A_n A'_n A_n^{-1} A_n'^{-1} - E) = n^2(A_n A'_n - A'_n A_n) A_n^{-1} A_n'^{-1} \\ n^2(A_n A'_n - A'_n A_n) = n^2 \{ (A_n - E)(A'_n - E) - (A'_n - E)(A_n - E) \} \rightarrow UV - VU \\ A_n^{-1} A_n'^{-1} \rightarrow E \end{cases}$$

及ビ $n \alpha (A_n - E) \rightarrow \alpha U$ (α real) カラ 定理2ニヨリ $n(\tilde{A}_n - E) \rightarrow \alpha U$ ナル如キ $\{\tilde{A}_n\}$ が $\mathcal{O}_f$ ニ存在スルコトカラワカル。

II. 群 $\mathcal{O}$ の定義微分方程式

以下 $= \wedge \mathcal{O} \wedge \mathcal{R} =$ 於テ閉カテヲルトスル。即チ

$A_i \in \mathcal{O}$, $A_i \longrightarrow B \in \mathcal{R}$ ナラ $B \in \mathcal{O}$ ト假定スルノデアリ。

定理4. $U \in \mathcal{T}$ ナラ $e^{\wedge U} (\wedge \text{real}) \in \mathcal{O}$.

証明. $\wedge U \in \mathcal{T}$ (定理3) デアル。ヨツテ $\{A_i\}$ ナル $\mathcal{O}$ ノ部分列 $=$ 對ソテ $n(A_n - E) \longrightarrow \wedge U$. 定理1 = ヨレバ

$$n \ln. A_n = \ln. (A_n^n) \longrightarrow \wedge U.$$

ヨツテ $\exp. \ln. (A_n^n) = A_n^n \longrightarrow e^{\wedge U}$. $A_n^n \in \mathcal{O}$ ナカラ

$\exp. (\wedge U) \in \mathcal{O}$ ($\mathcal{O} \wedge \mathcal{R} =$ 於テ fermé)

定理5. $U \in \mathcal{T}$ ナラ微分方程式

$$(b) \quad \frac{dx}{dt} = Ux \quad (t \text{ real parameter})$$

ヲ initial condition ($t=0$ トキ $x=E$) デ解テ $x(t) \in \mathcal{O}$.

証明. 上ノ如キ abstract ナ微分方程式ハ南雲氏論文=取扱ハレテヨリ, 南雲氏ハ之ヲ積分方程式ノ形

$$x(t) = E + U \int_0^t x(t) dt$$

= 書イテ successive approximation = ヨツテ解カレタ。其ノ解ハ

$$\chi(t) = E + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{U^m}{m!} t^m$$

ゲアツタ。之ハ我々ノ先ニ定義シタ $\exp. tU$ = 他ナラス
カラ前定理ヲ用フレバヨイ。

III. 群ノ生成 (Erzeugung)

$\mathcal{O}_f$ が R = 於テ開デテフルトイフコトノ他ニ, $\mathcal{O}_f \ni A_i$,
 $A_i \neq E$, $A_i \rightarrow E$ ナル $\{A_i\}$ ヲ集ヘタトキ $= A_i$ ノ適當ナ
Teilfolge A'_i ヲトレバ $\frac{1}{\varepsilon_i} (A'_i - E) \rightarrow U (\neq 0) \in \mathcal{J}$
ナル如キ $\varepsilon_i > 0$, $\varepsilon_i \rightarrow 0$ が存在スルモノト假定スル。之
ハ群 $\mathcal{O}_f$ が E = 於テ differentiable ト名ザケルコトニ
シヨウ。

Fundamental theorem. $\mathcal{O}_f$ が

i) R = 於テ開デテフル

ii) $\mathcal{O}_f$ が finite dimension

iii) $\mathcal{O}_f$ が zusammenhängend トスレバ

$\mathcal{O}_f$ ハ Lie group ヲ作ル。即チ $\mathcal{O}_f$ ノ任意ノ element ハ
 $\prod_{i=1}^k \exp. V_i$, $V_i \in \mathcal{J}$ ノ形ニ書ケル。

証明. 第一段: $\mathcal{O}_f$ が n dimension トスレバ $\mathcal{J} \in$
高々 n dimension. 何者 $\mathcal{J}$ ハ linear manifold
ナカラソノ一次独立ナ Base ヲ $U_1, U_2, \dots, U_m$;
 $n+1 \leq m$; トスレバ $\mathcal{O}_f$ = 属スル element $\exp. \sum_{i=1}^m a_i U_i$;

a_i real; $\wedge E$ の近傍で少くとも $n+1$ dimension =
 ナツテ了フ。ヨツテ $\mathcal{J}$ は $k(\leq n)$ コノ一次独立 + Base
 $U_1, U_2, \dots, U_k$ フモツ。從ツテ $\mathcal{J}$ は $\mathcal{R}$ = 於イテ
 fermé

第二段. exp. $\sum_{i=1}^k a_i U_i$; a_i real $\sum_{i=1}^k |a_i| \leq 1$; γ 形
 = 書ケル of γ element 全体 Γ は of = 於テ fermé.
 然ル Γ γ element で E の近傍 = アルモ γ は Gruppen-
 eigenschaft モツ。何者,

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ux(t), \quad \frac{d\psi(t)}{dt} = V\psi(t); \quad U, V \in \mathcal{J}$$

トスレバ明カニ

$$\begin{aligned} \frac{d\chi(t)\psi(t)}{dt} &= \frac{d\chi(t)}{dt}\psi(t) + \chi(t)\frac{d\psi(t)}{dt} \\ &= U\chi(t)\psi(t) + \chi(t)V\psi(t). \end{aligned}$$

之レが $W\chi(t)\psi(t)$, $W \in \mathcal{J}$ ノ形 = カケルトヨイ。依ツ
 テ $U\chi(t) + \chi(t)V = W\chi(t)$ トカケルトヨイ。両辺 =
 $\chi(t)^{-1} = \chi(-t)$ フカケルコト = ヨリ 結局

$$\chi(t)V\chi(-t) \in \mathcal{J}$$

ガ云ヘレバヨイ。然ル $W = V \in \mathcal{J}$ ガカラ $n(A_n - E) \rightarrow V$ ナ
 ル $\{A_n\}$ ガ $\mathcal{O}_\gamma$ = 存在スル。故ニ

$$n(\chi(t)A_n\chi(-t) - E) \rightarrow \chi(t)V\chi(-t)$$

ヨツテ $\chi(t)V\chi(-t) \in \mathcal{J}$.

第三段. $A_i \in \mathcal{O}_\gamma$; $A_i \in \Gamma$; $A_i \rightarrow E$ カラ 矛盾ヲ出

又。 $\Gamma \cap \mathcal{O}_f = \text{空}$ fermé 故に $T \in \Gamma$ かつ

$$|TA_i - E| \geq |T_i A_i - E| = \varepsilon_i > 0$$

ナル如き T_i が $\Gamma = \text{存在}$ シナケレバナラヌ。 $A_i \rightarrow E$,
 $E \in \Gamma$ 故に $T_i \rightarrow E$ 従って $\varepsilon_i \rightarrow 0$ 。 *differentiability at E* 故に $\frac{1}{\eta_{i(n)}} (T_{i(n)} A_{i(n)} - E) \rightarrow W \neq 0$ ナル
 如き *Teilfolge* が有ル。

ヨツテ特 = $\frac{\varepsilon_{i(n)}}{\eta_{i(n)}} \rightarrow 0$ 。 故に $\eta_{i(n)}$ が充分小ナラ

$$\exp. (-\eta_{i(n)} W) \in \Gamma.$$

ヨツテ $\exp. (-\eta_{i(n)} W) T_{i(n)} \in \Gamma$ (第=段)。 故 =

$$|\exp. (-\eta_{i(n)} W) T_{i(n)} A_{i(n)} - E| = \varepsilon'_{i(n)}$$

トナク $\varepsilon'_{i(n)} \geq \varepsilon_{i(n)}$ ナラケレバナラヌ。 然ル =

$$\exp. (-\eta_{i(n)} W) = E - \eta_{i(n)} W + O(|\eta_{i(n)}|^2)$$

$$\text{又} \quad T_{i(n)} A_{i(n)} = E + \eta_{i(n)} W + o(\eta_{i(n)})$$

$$\text{故に} \quad \exp. (-\eta_{i(n)} W) T_{i(n)} A_{i(n)} - E = o(\eta_{i(n)})$$

ヨツテ $\varepsilon'_{i(n)} = o(\eta_{i(n)})$ 。 又一方 $\frac{\varepsilon_{i(n)}}{\eta_{i(n)}} \rightarrow 0$ 故に

$$\varepsilon'_{i(n)} = o(\varepsilon_{i(n)}) \text{ 之ハ } \varepsilon'_{i(n)} \geq \varepsilon_{i(n)} \text{ 反ス。}$$

カクテ $\mathcal{O}_f$, E , 近傍ハ Γ デツクサレルコトがマカツタ。

第四段。 $\prod_{i=1}^l \exp. V_i$, $V_i \in \mathcal{J}$, 形 = 書ケル $\mathcal{O}_f$,
element , 全体 $\mathcal{O}_f' \cap \mathcal{O}_f = \text{空}$ $\text{offer} + \text{subgroup}$
 を作ル。 何者, $A \in \mathcal{O}_f'$, $B_i \in \mathcal{O}_f$, $B_i \rightarrow A$ トスルト
 $B_i A^{-1} \rightarrow E$ 。 ヨツテ i が充分大キイト $B_i A^{-1} \in \Gamma \subseteq \mathcal{O}_f'$ 。

ヨツテ $B_i \in \mathcal{O}_f'$. 且ツ $\mathcal{O}_f'$ ハ明カ = *zusammenhängend*
 ナカラ $\mathcal{O}_f' = \mathcal{O}_f$.

Remark. 南雲氏ハ *Polya* ガ *matrix* = 就テ行
 ツタヌウ = *integration* = ヨツテ $\mathcal{R}$ = 於ケル *one-*
parameter group ノ微分可能性ヲ巧ミニ示サレタ。
 コノトキハ從ツテ

$$\frac{G\left(\frac{t}{n}\right) - G(0)}{\frac{t}{n}} \rightarrow G'(0)$$

故ニ $n \{ G\left(\frac{t}{n}\right) - E \} = t G'(0)$. 從ツテ $n \ln. G\left(\frac{t}{n}\right) \rightarrow t G'(0)$
 ヨツテ $G\left(\frac{t}{n}\right)^n = G(t) \rightarrow \exp. (t G'(0))$ テアリマス (定
 理 4, 証明ト同ジデ *Fundamental theorem* ヲ要シ
 ナイ)