OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	Winkeltreu ト Bewegung
Author(s)	穂刈, 四三二
Citation	全国紙上数学談話会. 1935, 68, p. 9-14
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74203
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

281. Winkeltreu ト Bewegung.

穂刈四三二(北大)

Finsler ，空間ニ於イテ中心 x^i ニ於ケルニツノ Vektor $v^i(x,p)$, $w^i(x,p)$ ノナス角 θ ハ基本 Tensor ヲ $g_{ij}(x,p)$ デ表ハセバ

$$(1)\qquad \cos\theta=\frac{g_{ij}v^iw^j}{\sqrt{g_{ij}v^iv^j}\sqrt{g_{ij}w^iw^j}}$$

デ定義サレル、Riemann ノ場合ニハ v^i, w^i 及ビ g_{ij}

が x^i ノミノ函数デアルカラ (1) ノ特別ノ場合デアル。

コノ (1) 式ニ於テ特ニ $v^i = p^i$, $w^i = p^i + dp^i$ トオケバ ausgezeichnetes Linienelement (a.L ト略記スル) p^i ト無限小ガケ変ジタ $p^i + dp^i$ トノ間ノ角ヲ与ヘル、即チ dp^i ニツイテ三以上ノ高イ項ヲステ、ソノ小角ヲ $d\theta$ トオケバ

$$(2) \qquad d\theta^2 = \frac{1}{L} L_{ij}\, dp^i dp^j$$

ガ得ラレル。但シコゝニ

$$L(x, p) = \sqrt{g_{ij} p^i p^j}$$

$$L_i = \frac{\partial L}{\partial p^i}, \quad L_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial p^i \partial p^j}$$

デアル。

(2) ニヨッテ角ヲ定義シタモノハ所謂 "métrique angulare" トヨバレ、コレカラ有限ナ角ヲ求メルニハ或ル積分路ニ沿ッテ積分スレバヨイ。

注意スベキコトハ (1) カラ (2) ハ上ニ述ベタヤウニシテ求メラレルガ逆ニ (2) カラ (1) ハ一般ニハ積分スルコトニヨッテ得ラレナイ。従ッテ今無限小変換

$$(3) \qquad \bar{x}^i = x^i + \xi^i \delta t$$

ガ (1) ヲ invariant ニスルトキ Wenkeltreu von erster Art, (2) ヲ invariant ニスルトキ Winkeltreu von zweiter Art ト呼ブコトニスレバ

(3) が Wenkeltreu von erster Art ヲ admit スレバ Wenkeltreu von zweiter Art ヲモ admit スル。

コトガワカル。

定理1. (3) が Finsler ノ空間デ Wenkeltreu von zweiter Art ヲ admit スルタメニハ ξ^i ハ

(4) $$a_{ij} = \mathcal{L} h_{ij} - \mathcal{L}_{ij} h = 0$$

ヲ満足シナケレバナラナイ。但シコンニ

$$h = \mathcal{L}_{,k} \xi^k + \mathcal{L}_k \xi^k{}_{,l} p^l$$

デ記号，ハ又ニツイテノ偏微分ヲ表ハスモノトス。

証明. p^i ハ Vektor デアルカラ (3) ノ Trf. ニ對シテ

$$\bar{p}^i = p^i + \xi^i{}_{,l} p^l \delta t.$$

次ニ p^i ガ無限小 dp^i ダケ変ジタトキニ $\bar{p}^i$ ガ $d\bar{p}^i$ ノ変化ヲ受ケタトスレバ

$$\bar{p}^i + d\bar{p}^i = p^i + dp^i + \xi^i{}_{,l} (p^l + dp^l) \delta t$$

コノ二ツノ式カラ

$$d\bar{p}^i = dp^i + \xi^i{}_{,l} dp^l \delta t$$

ヨツテ

$$d\bar{\theta}^2 = \frac{1}{\bar{\mathcal{L}}} \bar{\mathcal{L}}_{ij} d\bar{p}^i d\bar{p}^j$$

$$= \frac{1}{\mathcal{L} + h\delta t} \left\{ \mathcal{L}_{ij} + \left(\mathcal{L}_{ij,k} \xi^k + \mathcal{L}_{ijk} \xi^k{}_{,l} p^l \right) \delta t + \cdots \right\}$$

$$\times\{dp^i+\xi^i_{,l}\,dp^l\delta t\}\{dp^i+\xi^i_{,l}\,dp^l\delta t\}$$

$$=d\theta^2+\frac{1}{\mathcal{L}^2}(-\mathcal{L}_{ij}h+\mathcal{L}h_{ij})dp^i dp^j\delta t+\cdots\cdots\cdots$$

即チ δt ノ二次以上ノ項ヲステヽ角が不変デアルタメニハ $\mathcal{L}^2\neq 0$ デアルカラ

$$(\mathcal{L}h_{ij}-\mathcal{L}_{ij}h)dp^i dp^j=a_{ij}\,dp^i dp^j=0$$

デナケレバナラナイ、然ルニ a_{ij} ノ中ニハ dp ハ含マザルが故ニコノ式が成立スルタメニハ

$$a_{(ij)}=0$$

然ルニ a_{ij} ハ i ト j トニツイテ對稱デアルカラ求メル條件ハ

$$a_{ij}=0$$

デアル。

定理2. (3)が Finsler 空間デ Wenkelreu von erster Art ヲ admit スルタメニハ ξ^i ハ

(5) $$2g_{(\lambda\mu}\alpha_{\nu)(\gamma}g_{\alpha\beta)}=\alpha_{(\beta\gamma}g_{\alpha)(\nu}g_{\lambda\mu)}+\alpha_{(\lambda\mu}g_{\nu)(\alpha}g_{\beta\gamma)}$$

ヲ満足シナケレバナラナイ。但シコヽニ

(6) $$\alpha_{ij}=g_{ij,h}\xi^h+g_{ijh}\xi^h_{,l}p^l+g_{hj}\xi^h_{,i}+g_{hi}\xi^h_{,j}$$

$$g_{\lambda\mu}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2\mathcal{L}^2}{\partial p^\lambda\partial p^\pi_1}$$

デアル。

証明ハ前ノ定理ト全ク同様ノ方針デヤレルカラ省略スル、

然シ非常ニ大キナ式ニナルカラ間違ヒヤスイ。

前ニ述ベタコトカラ

定理3. Finsler ノ空間ニ於テハ (5) ガ成立スレバ (4) ハ必ズ成立スル、逆ハ必ズシモ真デナイ。

コトガワカル、シカシ Riemann ノ場合ニハ一点 x^i ニ於ケル dx^i ト $dx^i + d(dx^i)$ トノナス角ヲ考フレバソレハ (2) デ与ヘラレル、タダコノ場合ニハ

$$\mathcal{L}(x, dx) = \sqrt{g_{ij}(x)\, dx^i\, dx^j}$$

デ g_{ij} ハ x ノミニ abhängen シテヰル、従ッテ2ノ場合ニハ容易ニ次ノコトガ証明出来ル。

定理4. Riemann ノ空間ニ於テハ (5) ガ成立スレバ必ズ (4) ガ成立シ、逆モ亦成立スル。

私ハ本紙65号, NO. 253 デ Finsler ノ空間ニ於ケル運動方程式トシテ (3) ノミノモトデハ

$$(\eta) \qquad \xi_{i|j} + \xi_{j|i} + 2C_{ijr}\xi^r_{|0} = 0$$

ヲ求メタ。コノ條件ハ曲線ト弧ノ長サヲ不変ニスルコトカラ求メタモノデアル、即チ

$$d\bar{s} = \bar{\mathcal{L}} = \mathcal{L} + h\delta t + \cdots\cdots$$
$$= ds + h\delta t + \cdots\cdots$$

即チコノ記号ニヨレバ (η) 式ハ

$$h = 0$$

トモ書クコトガ出来ル。實際ニ定理1ノ中デ與ヘタ如ク

$$h = \mathcal{L}_{,k}\xi^k + \mathcal{L}_k\xi^k_{;l}p^l$$

デアルカラ、コノ式ヲ p^i, p^j ニツイテ微分シ簡単ナ変形ヲ施セバ (7) 式ガ得ラレル。(6) 式カラモ (7) 式ガ求メラレル、即チ (7), $\alpha_{ij}=0$, $h=0$ ハ何レモ曲線ノ弧ノ長サヲ不変ニスルタメノ條件式デアル。

従ッテ (4), (5) カラ次ノ結果ガ得ラレル。

定理5. (3) ガ Finsler ノ空間ニ於テ曲線ノ長サヲ不変ニスレバ (3) ハ Wenkeltreu von $\left\{\begin{matrix}\text{erster}\\ \text{zweiter}\end{matrix}\right\}$ Art ヲ admit スル、即チ (3) ハ Bewegung ヲ admit スル、コノ逆ハ成立セズ。

コノ逆ノ成立シナイコトハ次ノ例デワカル。

ξ^i ガ

(8) $\quad h=\varphi(x)\,\mathcal{L}$

ヲ満足スルモノトス、(コゝニ $\varphi(x)$ ハ x ノミノ與ヘラレタ函数デアル) 然ルトキハ

$$h_{ij}=\varphi(x)\,\mathcal{L}_{ij}$$

デアルカラ (4) ニ代入スレバ

$$a_{ij}=\mathcal{L}\varphi\mathcal{L}_{ij}-\mathcal{L}_{ij}\varphi\mathcal{L}\equiv 0$$

即チ角ヲ不変ニスル、一方ニ於テ (2) ガ曲線ノ長サヲ不変ニスルタメニハ前ニ述ベタヤウニ $h=0$ デナケレバナラナイ、故ニ (8) ノ條件ノモトデハ $\varphi(x)\equiv 0$ デナイ限リ長サハ変化スル。

(18/XI, 1935)