



Title	抽象空間ニ於ケル重心ニ関シテ分解可能ナ偏差
Author(s)	南雲, 道夫
Citation	全国紙上数学談話会. 1935, 69, p. 11-15
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74212
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

290. 抽象空間ニ於ケル重心ニ関シテ分解 可能ナ偏差

南 雲 道 夫 (阪大)

ゆーくりっど空間ニ於ケル重心ニ就イテハ次ノ著シイ性質
ガアル。

S ヲ n 個ノ点 $P_1, P_2, \dots, P_n$ ノ重心トシ、 Q ヲ任
意ノ点トスレバ

$$\sum_{\nu=1}^n \overline{P_{\nu}Q}^2 = \sum_{\nu=1}^n \overline{P_{\nu}S}^2 + n \overline{SQ}^2.$$

但シ $\overline{PQ}$ ハ PQ 間ノ距離デアアル。

假 定

扱テ以上ノ考ヘヲ一般ノ位相空間ニ拡張シ、 n 個ノ点 $P_1, \dots$
 $\dots, P_n$ ノ重心 S ハ任意ノ点 Q ニ對シ

$$(0) \quad \sum_{\nu=1}^n f(P_{\nu}, Q) = \sum_{\nu=1}^n f(P_{\nu}, S) + n f(S, Q)$$

ナル函数方程式ヲ満足スルモノトスル。但シ $f(P, Q)$ ハ
實數値ヲ取ル P, Q ノ函数デアレヲ P, Q ノ 偏差ト名付ケル。

$$(1) \quad P \neq Q \text{ ノ時, } f(P, Q) > 0, \quad f(P, P) = 0.$$

$$(2) \quad f(P, Q) = f(Q, P)$$

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P \text{ ナルコトト } \lim_{n \rightarrow \infty} f(P_n, P) = 0 \text{ ト}$$

ハ同等。

(4) 且ツ $\lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} f(P_m, P_n) = 0$ ナラバ $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n$ が存

在スル。

以上ノ假定ハ空間ガ *topologischer Raum* デアルガ、距離ガ異ヘラレテナイノデ、 $f(P, Q)$ ヲ以テ距離ノ代用ノ役目ヲサセルタメノ條件ニ他ナラナイ。(4)ハ空間ガ *vollständig* ナルコト (Cauchyノ收斂條件ガ成立スルコト) ヲ示スモノデアル。

尚ホ二点ノ重心ニツイテ次ノ假定ヲ加ヘル。

(5) P, Q ヲ任意ノ二点トスル時、 Q ガ P, P' ノ重心デア
ル様ナ点 P' ガ常ニ只一ツ存在スル。

假定(5)ハ強イケレドモ証明ノ遂行上省クコトガ出来ナイ。

以上ノ假定ノ下ニ $f(P, Q)$ 及ビ重心ノ性質、從ツテ又空間ノ性質ヲ定ムルノガ目的デアル。

結 論

- (a) $\sqrt{f(P, Q)}$ ナル量ガ距離ノ性質ヲ有スル事
- (b) 空間ハ *Vektor* ノ性質ヲ有スル (線形距離空間ナル) 事

(c) 重心ハ $y = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n x_\nu$ デ表ハサレル事

(d) 空間ノ距離 $\sqrt{f(P, Q)}$ ハユークリッド的なる事

$[|x|^2 = (x, x), (x, y) \text{ ハ } x, y \text{ ノ inneres}]$

Produkt 即チ $\varphi, \psi = \text{ツキ linear}$ ナル事]

証明ノスケッチ

証明=ハ、本質的=ハ $n=2$ ノ場合ノミデ充分ナル ($n=4$
ハ $n=2$ ノ場合ヲ組合セテ得ラレル)

先ヅ $\sqrt{f(P, Q)} = \rho(P, Q)$ トスレバ (0) 及ビ (2) カ
ラ

$$\rho(P_1, S) = \rho(P_2, S) = \frac{1}{2} \rho(P_1, P_2).$$

又一般=

$$\rho(P_1, P_2) + \rho(P_2, P_3) \geq \rho(P_1, P_3).$$

從ツテ空間ハ $\rho(P, Q)$ ヲ距離トスル 距離空間 デ重心ハ中点
ノ性質ヲ持ツ。

次=又 (0) カラ 重心ハ結合ノ法則 (紙上談話會 66 号,
268) ヲ満足スルコトガワカル、特= P_1, P_2 ノ重心ヲ
 $[P_1, P_2]$ トスレトキハ、結合ノ法則

$$([P_1, P_2], [P'_1, P'_2]) = ([P_1, P'_1], [P_2, P'_2])$$

ヲ満足スル。又 $[P_1, P_2] = [P_2, P_1]$, $[P, P] = P$ ナルコトハ
言フマデモナイ。之レト (5) ノ假定カラ

$$[A, P_3] = [P_1, P_2] \quad (A \text{ハ定点})$$

ナル關係ガアルトキ

$$\vec{AP_3} = \vec{AP_1} + \vec{AP_2}$$

$$\text{ト定ムレバ} \quad \begin{cases} \vec{AP_1} + \vec{AP_2} = \vec{AP_1} + \vec{AP_2} \\ \vec{AA} + \vec{AP} = \vec{AP} \\ \vec{AP} + \vec{AX} = \vec{AQ} \end{cases}$$

が一義的 = 解ケルコトが証明サレ、更 = 組合セノ法則

$$(\vec{AP}_1 + \vec{AP}_2) + \vec{AP}_3 = \vec{AP}_1 + (\vec{AP}_2 + \vec{AP}_3)$$

が証明出来ル、シカシテ重心 $Q = [P_1, P_2]$ ハ

$$2\vec{AQ} = \vec{AP}_1 + \vec{AP}_2 \quad [\text{之ヲ } \vec{AQ} = \frac{1}{2}(\vec{AP}_1 + \vec{AP}_2)] \text{ トス}$$

= ヨツテ規定サレル。

次 = 又 (0) ノ假定ト距離 $\rho(P, Q) = \sqrt{f(P, Q)} = \text{ヨリ}$

$$\vec{P_1P'_1} = \vec{P_2P'_2} \quad [\vec{PQ} = \vec{AQ} - \vec{AP} \text{ ト定ム}] \text{ ナルトキ}$$

$$\rho(P_1, P'_1) = \rho(P_2, P'_2)$$

又、重心が中点ナルコト = ヨリ $\vec{AP}_n = n\vec{AP}$ トスレバ

$$\rho(A, P_n) = n\rho(A, P)$$

ヲ得ル、之レ等ノコトト (4) (*Vollständigkeit*) カラ
空間ハ線状空間 (*Banach*ノ空間) トナルコトが証明サレ
ル。

次 = $\vec{AP} = \varphi$ デ示セバ

$$f(P_1, P_2) = \{\rho(P_1, P_2)\}^2 = \rho(\varphi_2 - \varphi_1)$$

トシテ表ハサレル、故ニ函数方程式 (0) ハ $S = A$ トスルトキ

特ニ $n = 2$ ノ場合ニ於テ

$$\rho(\varphi + \psi) + \rho(\varphi - \psi) = 2\{\rho(\varphi) + \rho(\psi)\}$$

トナル。

此ノ函数方程式カラ (*J. v. Neumann* ガ *Hilbert*
空間ノ *Metrik* ヲ *charakterisieren* スルキニ
用ヒタ)

$$\varphi(\varphi) = (\varphi, \varphi).$$

但シ (φ, φ) ハ $\varphi = \text{ツイテモ}$ $\varphi = \text{ツイテモ linear}$
 デアル。

[上ノ方程式ニ於テ φ ノ代リ $= \varphi_1 + \varphi_2$ トオイヌモ、カ
 ラ $\varphi_1 - \varphi_2$ トオイヌモ、ヲ減ズルコトニヨリ、 $\varphi(\varphi_1 + \varphi_2)$
 $- \varphi(\varphi_1 - \varphi_2) = \psi(\varphi_1, \varphi_2)$ トオケバ

$$\psi(\varphi_1, \varphi_2) = \psi(\varphi_2, \varphi_1),$$

$$\psi(\varphi_1, \varphi_2 + \varphi) + \psi(\varphi_1, \varphi_2 - \varphi) = 2\psi(\varphi_1, \varphi_2),$$

又 $\psi(\varphi, \varphi) = 4\varphi(\varphi) + \nu = \text{ヨリ上、結論ヲ生ズ。}]$

—— 以 上 ——