OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	距離ヅケラレタ環ニ於テ閉ヂタ連續群 III
Author(s)	吉田, 耕作
Citation	全国紙上数学談話会. 1935, 70, p. 5-7
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74220
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

298. 距離ヴケラレタ環ニ於テ閉デタ連續群 III

吉田耕作（阪大）

前談話280ニ於テ Of ノ differentiability ヲ Of ダケノ topological ナ條件カラ出セナイカト申シマシタガ次ノコトガ云ヘル様デス。

定理　R = einbetten シタ群 Of ガ locally compact ナラバ Of ハ differentiable デアル。

Of ノ of dimension finite ヲ假定シテヲリマセン。証明ニハ三ツノ lemma ヲ要シマス。

Lemma 1. 任意ノ群 Of ハ arbitrarily small cyclic group ヲ subgroup トシナイ。

証. 任意ニ小ナル $\delta>0$ ニ對シ，$A\neq E$ $|A^n-E|\leq\delta$，$n=0,\pm1,\pm2,\cdots\cdots$ ヲ満足スル如キ A ガ Of ニハ存在シナイ。何者，若シ斯カル A ガ或ル小サナ δ ニ對シ存在スレバ

$$l_n A^n = A_n - E + O(|A_n-E|^2)$$

ニヨリ $|l_n A^n| = |n\, l_n A| = |n|\,|l_n A| \leq |A_n-E|+O(|A^n-E|^2)$ $=\delta+O(\delta^2)$。之ハ $n\to\infty$ ノトキ矛盾デアル。

Lemma 2. Of ガ locally compact ナラバ $A_i\in Of$, $A_i\neq E$, $A_i\to E$ ナル $\{A_n\}$ ニ對シ適當ナ Teilfolge $\{A'_n\}$ ヲトルト $A'^{p_n}_n \longrightarrow A\neq E$ ナル如キ整数 p_n ノ folge アリ。

証. Lemma 1 ニヨリ各 A_i ニ對シ

$$\left|A_i^{p_i\pm 1}-E\right|\leqq\delta,\quad \left|A_i^{p_i}-E\right|>\delta$$

ナル如キ整数 p_i アリ（但シ $p_i>0$ ノトキハ p_i-1, $p_i<0$ ノトキハ p_i+1 ノ方ヲトル。又勿論 $|A_i-E|<\delta$, $i=1,2,3,\cdots\cdots$トス）$A_i\longrightarrow E$ トOf, composition, stetigkeit（ソノ topology ハ R ノソレト同ビ）カラ

$$\left|A_i^{p_i}-E\right|\leqq\varepsilon(\delta),\qquad i=1,2,3,\cdots\cdots$$

ナル如キ $\varepsilon(\delta)$ が存在スル。ヨッテ Of, locally compact ナコトカラ Lemma ヲ得ル。

Lemma 3. Of が locally compact ナラ Of ハ E ニ於テ differentiable デアル。

証. $A_i\in Of$, $A_i\neq E$, $A_i\longrightarrow E$ トス。Lemma 2 ニヨリ $A_i'^{p_i}\longrightarrow A\neq E$ ナル如キ A_i', p_i アリ。ヨッテ

$$\ln A_i'^{p_i}=p_i\ln A_i'\longrightarrow \ln A\neq 0$$

依ッテ $p_i(A_i'-E)\longrightarrow \ln A\neq 0$

—— 以上 ——

ヨッテ先ノ Fundamental theorem ヲ次ノ如ク述ベルコトガ出來ル。

Fundamental theorem. Metrical complete ring R ニ於テ開ケタ連続群 Of が

i) of finite dimension

ii) locally compact

iii) Zusammenhängend

ナラバ $\mathfrak{G}$ ハ Lie 群デアル。

之ハ Hilbert ノ問題ノ special case ノ一ツノ解答デアル。

尚先ノ differentiability ノ定義ニ於ケル「正數 ε_i」ヲ「實數 ε_i」トシタ方ガ話ガ symmetric ニナル。又 n ガ負整數ノ場合ノ $\ln A^n$ ヲモ考ヘテ A ガ充分 E ニ近ケレバ $\ln A^n = n \ln A$ ヲ上ノ議論中ニ使ッタ。differentiability ニツイテモコノ「實數 ε_i」ノ意味デ議論シマシタ。

今レッ上ノ Fundamental theorem ニ於テ $\mathfrak{G}$ ガ $\mathfrak{R}$ ニ於テ閉デテヲルト云フコトハ「$\mathfrak{G}$ ガ Einheit ノ近傍ニ於テ $\mathfrak{R}$ ノ中デ閉デテヲル」ニ直セマス。

即チ斯カル近傍ノ element ガ $\exp U$, $U \in \mathfrak{T}$ ト表ハセルコトノ証明ハ先ノ証明（前論 280）ヲ少シ modify スレバヨイノデスカラ。ダカラ南雲氏ノ結果ガ上ノ Fundamental theorem ノ系トシテ得ラレマス。