



Title	距離ツケラレタ環ニ於テ閉ヂタ連續群 III
Author(s)	吉田, 耕作
Citation	全国紙上数学談話会. 1935, 70, p. 5-7
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74220
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

298. 距離ツケラレタ環ニ於テ関デタ 連続群 III

吉田耕作 (阪大)

前談話 280 = 於テ $\mathcal{O}_f$ の differentiability ヲ $\mathcal{O}_f$ が $topological$ ナ条件カラ出セナイカト申シマシタガ次ノコトガ云ヘル様デス。

定理 $R = \text{einbetten}$ シタ群 $\mathcal{O}_f$ が *locally compact* ナラバ $\mathcal{O}_f$ ハ differentiable デアル。

$\mathcal{O}_f$ の dimension finite ヲ假定シテアリマセン。証明 = ハ三ツノ lemma ヲ要シマス。

Lemma 1. 任意ノ群 $\mathcal{O}_f$ ハ *arbitrarily small cyclic group* ヲ subgroup トシナイ。

証. 任意ニ小ナル $\delta > 0$ = 對シ, $A \neq E$ $|A^n - E| \leq \delta$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ヲ満足スル如キ A が $\mathcal{O}_f$ = ハ存在シナイ。何者, 若シ斯カル A が或ル小サナ δ = 對シ存在スレバ

$$\begin{aligned} \ln A^n &= A_n - E + O(|A_n - E|^2) \\ &= \text{ヨリ } |\ln A^n| = |n \ln A| = |n| |\ln A| \leq |A_n - E| + O(|A^n - E|^2) \\ &= \delta + O(\delta^2). \end{aligned}$$

之ハ $n \rightarrow \infty$ ノトキ矛盾デアル。

Lemma 2. $\mathcal{O}_f$ が *locally compact* ナラバ $A_i \in \mathcal{O}_f$, $A_i \neq E$, $A_i \rightarrow E$ ナル $\{A_n\}$ = 對シ適當ナ Teilfolge $\{A'_n\}$ ヲトルト $A_n'^{p_n} \rightarrow A \neq E$ ナル如キ整数 p_n ノfolge アリ。

証. Lemma 1 =ヨリ各 A_i =對シ

$$\left| A_i^{p_i \pm 1} - E \right| \leq \delta, \quad \left| A_i^{p_i} - E \right| > \delta$$

ナル如キ整数 p_i アリ (但シ $p_i > 0$ ノトキハ $p_i - 1$, $p_i < 0$ ノトキハ $p_i + 1$ ノ方ヲトル。又勿論 $|A_i - E| < \delta$, $i = 1, 2, 3, \dots$ トス) $A_i \rightarrow E$ ト O_f , composition , stetigkeit (ソ, topology ハ $\mathbb{R}$, ソレト同シ) カラ

$$\left| A_i^{p_i} - E \right| \leq \varepsilon(\delta), \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

ナレ如キ $\varepsilon(\delta)$ が存在スル。ヨツテ O_f , locally compact ナコトカラ Lemma ヲ得ル。

Lemma 3. O_f が locally compact ナラ O_f ハ E = 於テ differentiable テアル。

証. $A_i \in O_f$, $A_i \neq E$, $A_i \rightarrow E$ トス。Lemma 2 =ヨリ $A_i'^{p_i} \rightarrow A \neq E$ ナル如キ A_i' , p_i アリ。ヨツテ

$$\ln A_i'^{p_i} = p_i \ln A_i' \rightarrow \ln A \neq 0$$

$$\text{依ツテ } p_i (A_i' - E) \rightarrow \ln A \neq 0$$

— 以上 —

ヨツテ先, Fundamental theorem ヲ次ノ如ク述べルコトが出来ル。

Fundamental theorem. Metrical complete ring $\mathcal{R}$ = 於テ開タタ連続群 O_f が

i) of finite dimension

ii) locally compact

iii) zusammenhängend

ナラバ $\mathcal{O}_X$ は Lie 群デアール。

之ハ Hilbert の問題, special case ノーツノ解答デアール。

尚先, differentiability の定義 = 於ケル「正数 ε_i 」ヲ「實数 ε_i 」トシタ方が話が symmetric = ナル。又 n が負整数ノ場合, $\ln A^n$ ヲモ考ヘテ A が充分 E = 近ケレバ $\ln A^n = n \ln A$ ヲ上ノ議論中 = 使ッタ。differentiability = ツイテモコノ「實数 ε_i 」ノ意味ヲ議論シマシタ。

今ノーツ上, Fundamental theorem = 於テ $\mathcal{O}_X$ が $\mathcal{R}$ = 於テ開デテアルト云フコトハ「 $\mathcal{O}_X$ が Einheit, 近傍 = 於テ $\mathcal{R}$ ノ中デ開デテアル」= 直セマス。

即チ斯カル近傍, element が $\exp. U$, $U \in \mathcal{U}$ ト表ハセルコトノ証明ハ先ノ証明 (前論 280) ヲ少シ modify スレバヨイノデスカラ。デカラ南雲氏ノ結果ガ上ノ Fundamental theorem ノ系トシテ得ラレマス。