



Title	Class $L_1(0, \infty)$ ノ函数ノ Fourier transform . I .
Author(s)	高橋, 龍夫
Citation	全国紙上数学談話会. 1935, 70, p. 8-14
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74221
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

299. Class $L_1(0, \infty)$ の函数, Fourier transform. I.

高橋 龍夫 (東北大)

$f(x) \in L_p(0, \infty)$ ($2 \leq p < \infty$) トスルト
 $F(u, a) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a f(x) \cos xu \, dx$ ハ $L_q =$ 於ケル mean
 $\neq a \rightarrow \infty$, トキソノ Fourier transform $F(u) =$
 converge スル. ソシテ $F(u)$ ハ $L_q(0, \infty)$ の函数デア
 ル . コレ $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. ソシテ $F(u)$ カラ

$$f(x, a) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a F(u) \cos xu \, du \text{ ト作ルト } f(x, a) \text{ ハ}$$

$L_p =$ 於ケル mean $\neq f(x) = \text{converge}$ スル. 之ハ
 Jitchmarsh 及ビ Hille-Tamarkin = ヨツテ証明
 サレタコトデアルガ $f(x, a)$ が mean $\neq f(x) = \text{tend}$
 スルコトハ $p=1$ の場合ニハ成立シナイ. 之レハ Hill-
 Tamarkin (Bull. of the Amer. Math. Soc. 1933)
 = ヨツテ成立シナイ例が擧ゲラレテキル. 然シ更ニ簡單ニ
 $f(x) = 1$ for $0 < x \leq \beta < \infty$ 且ツ他デハ 0 デアル
 ヤウナ function がソノ例ニナルコトが容易ニ証明出來
 ル. 吾々ハ $f(x) \in L_1(0, \infty)$ ナラバ $f(x, a)$ が $a \rightarrow \infty$,
 トキ如何ナル function = 關シテ mean $\neq \text{converge}$
 スルカラ考ヘテ見ル. サテ $f(x, a)$ が $(C, 1)$ $\neq f(x) =$
 almost everywhere tend スルコトハ衆知デアルガ

上, *mean convergence* の意味がツケラレルト L_1 class の *Fourier transform* の *Theory* デ (C, 1) トイフ *technic* が省カレハシナイカトモ思ハレル。

之ノ問題ヲ考ヘルノ、= 今 *Fourier series* の *analogy* ヲ考ヘテ見ル、 $f(x, a)$ ハ *Fourier series* , *partial sum* = 對應スルモノデアツテ今 $f(x)$, *Fourier series* の *partial sum* ヲ $S_n(x)$ トスルトヤハリ $S_n(x)$ が L_1 = 於ケル *mean* デ $f(x) = \text{converge}$ シナイ。然シ有名ナ *Kolmogoroff* の定理カラ、 $n \rightarrow \infty$, トキ

$$\int_0^{2\pi} |f(x) - S_n(x)|^{1-\varepsilon} dx \rightarrow 0 \quad (\varepsilon > 0)$$

ガ云ハレル、コノ *analogy* ガ *Fourier transform* の *Theory* デ成立スルカヲ考ヘテ見ルト実ハ成リ立タナイ。即チ $f(x) = 1$, $(0 < \alpha \leq x \leq \beta < \infty)$; $f(x) = 0$ $(0 < x < \alpha, \infty > x > \beta)$ ヲ考ヘルト之ニ付テハ

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^\infty |f(x) - f(x, a)|^{1-\varepsilon} dx$$

ハ存在シナイ、夫デ *Fourier series* , *analogy* ヲ辿ルコトが出来ナイデ他ノ見地カラ考ヘ直サネバナラナイ。

方法トシテ L_p ($p > 1$) の場合ノヲ踏襲スルノデアルガ $f(x) \in L_1$, + ν 函数 = 對スル *conjugate function* $g(x)$

ト元、 $f(x)$ トノ關係カラ考ヘテ見ル、 $f(x)$ が *finite interval* デ定義サレテキル場合カラ始メル、ソシテ *Fourier series*、*Kolmogoroff*、定理=類スル ϵ 、ヲ証明シヌ。

Theorem 1. $f(x) \in L_1(0, 2\pi)$ トシ、 $g(x)$ 、conjugate function 7 $g(x)$ トスルト

$$\int_0^{2\pi} \frac{|g(x)|}{|\log|g(x)||^{1+\epsilon}+1} dx \leq A \int_0^{2\pi} |f(x)| dx.$$

コノ A 、 f 、 ϵ 、ハ depend シナイ。且ツ ϵ 、ハ任意ノ定マツタ正数デアイル。

コノ証明=次、*Itchmarsh*、Lemma 7 用フ。
(*Proc. London Math. Soc.*, Vol. 29, 1928)

Lemma. $f(x)$ 、conjugate function 7 $g(x)$ トスル。 $|g(x)| > R$ ナル set 7 E トスルト

$$m(E) \cdot R < A \int_0^{2\pi} |f(x)| dx.$$

次=定理ノ証明ヲスル。 $0 < |g(x)| \leq K$ ナラバ $g_n(x) = |g(x)|$ 。

$$|g(x)| > K \text{ ナラバ } g_n(x) = K.$$

コノイフ $g_n(x)$ 7 トル。 $|g(x)| > r-1$ ナル set 7 e_r トシ $m(e_r) = \mu_r$ トオク。

$$\int_0^{2\pi} \frac{|g_n(x)|}{|\log|g_n(x)||^{1+\epsilon}+1} dx = \sum_{r=1}^n \int_{e_r - e_{r+1}} \frac{|g_n(x)|}{|\log|g_n(x)||^{1+\epsilon}+1} dx$$

$$\text{A } \phi(x) = \frac{x}{|\log x|^{1+\varepsilon} + 1}, \quad (x > 0) \text{ トオキ.}$$

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \phi(x) \text{ for } 0 < x \leq 1, \\ &= \text{linear} \quad 1 \leq x \leq e^\varepsilon, \\ &= \phi(x) \quad e^\varepsilon \leq x < \infty \end{aligned}$$

トスル^ト $\psi(x)$ は *monotone increasing* = ナリ 且ッ
 $|\phi(x)| \leq A |\psi(x)|$ 且ッ $|\psi(x)| \leq A |\phi(x)|$. (以下 A は *absolute constant* ヲ表ハシ場所場所ガ異ツテオツテモヨ
 イトスル)

ソウスル^ト

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{|g_u(x)|}{|\log |g_u(x)||^{1+\varepsilon} + 1} dx &\leq A \sum_{r=1}^u \int_{e_r - e_{r+1}} \psi(|g_u(x)|) dx \\ &\leq A \sum_{r=1}^u \psi(r) (\mu_r - \mu_{r+1}) \\ &\leq A \sum_{r=1}^u \frac{r}{|\log r|^{1+\varepsilon} + 1} (\mu_r - \mu_{r+1}) \\ &\leq A \sum_{r=1}^{u-1} \mu_{r+1} \left(\frac{r+1}{|\log(r+1)|^{1+\varepsilon} + 1} - \frac{r}{|\log r|^{1+\varepsilon} + 1} \right) + A \mu_1. \end{aligned}$$

サテ r が充分大ナルトキ

$$\frac{r}{|\log(r+1)|^{1+\varepsilon} + 1} - \frac{r}{|\log r|^{1+\varepsilon} + 1} = O\left(\frac{1}{\log^{1+\varepsilon} r}\right)$$

デアルカラ

$$\begin{aligned}
&\leq A \sum_{r=1}^{u-1} \mu_r \cdot \frac{1}{\log^{1+\varepsilon} r+1} + A \mu_1. \\
&\leq A \int_0^{2\pi} |f(x)| dx \cdot \sum_{r=1}^{u-1} \frac{1}{r(\log^{1+\varepsilon} r+1)} \quad (\text{Lemma 6}) \\
&\leq A \int_0^{2\pi} |f(x)| dx.
\end{aligned}$$

$k \rightarrow \infty$ トシテ 定理が証明サレタ.

Theorem 2. $f(x)$ $\gamma (0, 2\pi)$ デ L_1 = 属スルトビ,
 γ Fourier series, partial sum $\gamma S_n(x)$ ト
 スルト

$$\int_0^{2\pi} \frac{|f(x) - S_n(x)|}{|\log |f(x) - S_n(x)||^{1+\varepsilon} + 1} dx \rightarrow 0. \quad (n \rightarrow \infty).$$

証明. 容易 = $\phi(2x) \leq A\phi(x)$ + ヲトガナルカヲ

$$\begin{aligned}
\phi(x+y) &\leq A\psi(x+y) \leq A\psi(2 \max(x, y)) \\
&\leq A(\psi(2x) + \psi(2y)) \leq A(\psi(x) + \psi(y)) \\
&\leq A(\phi(x) + \phi(y)).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_n(x) &= \frac{\cos nx}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(x+t) \sin n(x+t)}{\tan \frac{t}{2}} dt \\
&\quad - \frac{\sin nx}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(x+t) \cos n(x+t)}{\tan \frac{t}{2}} dt + o(1).
\end{aligned}$$

$g(x), h(x) \gamma f(x) \sin nx, f(x) \cos nx$, conjugate function トスルト

$$\begin{aligned}
& \int_0^{2\pi} \frac{|S_n(x)|}{|\log|S_n(x)||^{1+\varepsilon} + 1} dx \leq A \int_0^{2\pi} \phi\left(\left|\frac{\cos nx}{2\pi} g(x)\right| + \left|\frac{\sin nx}{2\pi} h(x)\right| + o(1)\right) dx \\
& \leq A \int_0^{2\pi} \phi\left(\left|\frac{\cos nx}{2\pi} g(x)\right|\right) dx \\
& \quad + A \int_0^{2\pi} \phi\left(\left|\frac{\sin nx}{2\pi} h(x)\right|\right) dx + o(1) \\
& \leq A \int_0^{2\pi} \phi(|g(x)|) dx + A \int_0^{2\pi} \phi(|h(x)|) dx + o(1)
\end{aligned}$$

$$(1) \leq A \int_0^{2\pi} |f(x)| dx + o(1) \quad (\text{Theorem 1 の } \bar{\tau})$$

$$\text{今 } \int_0^{2\pi} \phi(|f(x) - f_1(x)|) dx < \delta \quad \text{及 } \int_0^{2\pi} |f(x) - f_2(x)| dx < \delta$$

ヲ満足スルヤウ = 任意, 正数 δ = 對シテ differentiable

function $f_1(x)$ ヲトル、之ハ可能デアル。(拙著、函数列ノ強收斂、弱收斂 = 就テ、綜合報告、數物會誌)、 $f_1(x)$

ノ Fourier series, partial sum ヲ $S_n^{(1)}(x)$ トスルト $S_n^{(1)}(x) \rightarrow f(x)$ が一樣 = 成リ立ツ。故 =

$$\int_0^{2\pi} \phi(|f_1(x) - S_n^{(1)}(x)|) dx \rightarrow 0$$

今 $f(x) - f_1(x) = f_2(x)$ トオキ $f_2(x)$ ノ Fourier series, partial sum ヲ $S_n^{(2)}(x)$ トスルト (1) カラ

$$\int_0^{2\pi} \phi(|S_n^{(2)}(x)|) dx \leq A \int_0^{2\pi} |f_2(x)| dx + O(1) \leq A\delta + O(1).$$

故 =

$$\begin{aligned} & \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \phi(|f(x) - S_n(x)|) dx \\ & \leq A \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \phi(|f_1(x) - S_n^{(1)}(x)|) dx + A \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \phi(|f_2(x)|) dx \\ & \quad + A \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \phi(|S_n^{(2)}(x)|) dx \leq A\delta + O(1) \end{aligned}$$

之ヲ Theorem , 証明が終ル。