OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	Class L1(0,∞) ノ函數ノ Fourier transform . I .
Author(s)	高橋, 龍夫
Citation	全国紙上数学談話会. 1935, 70, p. 8-14
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74221
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

299. Class $L_1(0,\infty)$ ノ函數ノ Fourier transform. I.

高橋龍夫（東北大）

$f(x) \subset L_p(0,\infty)$ $(2 \geqq p > 1)$ トスルト $F(u,a) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a f(x) \cos xu\, dx$ ハ L_q ニ於ケル mean デ $a \to \infty$ ノトキソノ Fourier transform $F(u)$ = converge スル、ソシテ $F(u)$ ハ $L_q(0,\infty)$ ノ函數デアル、コヽニ $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. ソシテ $F(u)$ カラ

$$f(x,a) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a F(u) \cos xu\, du$$

ヲ作ルト $f(x,a)$ ハ L_p ニ於ケル mean デ $f(x)$ = converge スル、之ハ Titchmarch 及ビ Hille-Tamarkin ニヨッテ証明サレタコトデアルガ $f(x,a)$ ガ mean デ $f(x)$ = tend スルコトハ $p=1$ ノ場合ニハ成立シナイ. 之レハ Hill-Tamarkin (Bull. of the Amer. Math. Soc. 1933) ニヨッテ成立シナイ例ガ擧ゲラレテヰル、然シ更ニ簡單ニ $f(x)=1$ for $0 < \alpha \leqq x \leqq \beta < \infty$ 且ツ他デハ 0 デアルヤウナ function ガソノ例ニナルコトガ容易ニ証明出來ル。吾々ハ $f(x) \subset L_1(0,\infty)$ ナラバ $f(x,a)$ ガ $a \to \infty$ ノトキ如何ナル function ニ關シテ mean デ converge スルカヲ考ヘテ見ル、サテ $f(x,a)$ ガ $(C,1)$ デ $f(x)$ = almost everywhere tend スルコトハ衆知デアルガ

上ノ mean convergence ノ意味ガツケラレルト L_1 class ノ Fourier transform ノ Theory デ (C, 1) トイフ technic ガ省カレハシナイカトモ思ハレル。

之ノ問題ヲ考ヘルノニ今 Fourier series ノ analogy ヲ考ヘテ見ル、$f(x,a)$ ハ Fourier series ノ partial sum ニ對應スルモノデアッテ今 $f(x)$ ノ Fourier series ノ partial sum ヲ $S_n(x)$ トスルトヤハリ $S_n(x)$ が L_1 ニ於ケル mean デ $f(x)$ ニ converge シナイ。然シ有名ナ Kolmogoroff ノ定理カラ、$n\to\infty$ ノトキ

$$\int_0^{2\pi} |f(x)-S_n(x)|^{1-\varepsilon}\,dx \to 0 \quad (\varepsilon>0)$$

ガ云ハレル、コノ analogy ガ Fourier transform ノ Theory デ成立スルカヲ考ヘテ見ルト実ハ成リ立タナイ。即チ $f(x)=1$, $(0<\alpha\leqq x\leqq\beta<\infty)$; $f(x)=0$ $(0<x<\alpha,\ \infty>x>\beta)$ ヲ考ヘルト之ニ付テハ

$$\lim_{a\to\infty}\int_0^{\infty} |f(x)-f(x,a)|^{1-\varepsilon}\,dx$$

ハ存在シナイ、夫デ Fourier series ノ analogy ヲ辿ルコトが出來ナイデ他ノ見地カラ考ヘ直サネバナラナイ。

方法トシテ L_p $(p>1)$ ノ場合ノヲ踏襲スルノデアルが $f(x)\subset L_1$ ナル函数ニ對スル conjugate function $g(x)$

ト元ノ $f(x)$ トノ関係カラ考ヘテ見ル、$f(x)$ が finite interval デ定義サレテヰル場合カラ始メル、ソシテ Fourier series ノ Kolmogoroff ノ定理ニ類スルモノヲ証明シヤウ。

Theorem 1. $f(x) \subset L_1(0, 2\pi)$ トシソノ conjugate function ヲ $g(x)$ トスルト

$$\int_0^{2\pi} \frac{|g(x)|}{|\log|g(x)||^{1+\varepsilon}+1}\,dx \leqq A\int_0^{2\pi} |f(x)|\,dx.$$

コヽニ A ハ f ニハ depend シナイ．且ツ ε ハ任意ノ定マツタ正数デアル。

コノ証明ニ次ノ Titchmarsh ノ Lemma ヲ用フ．(Proc. London Math. Soc., Vol. 29, 1928)

Lemma. $f(x)$ ノ conjugate function ヲ $g(x)$ トスル．$|g(x)| > R$ ナル set ヲ E トスルト

$$m(E)\cdot R < A\int_0^{2\pi} |f(x)|\,dx.$$

次ニ定理ノ証明ヲスル．$0 < |g(x)| \leqq K$ ナラバ $g_u(x) = |g(x)|$．

$|g(x)| > K$ ナラバ $g_u(x) = K$．

コヽイフ $g_u(x)$ ヲトル．$|g(x)| > \nu - 1$ ナル set ヲ e_ν トシ $m(e_\nu) = \mu_\nu$ トオク。

$$\int_0^{2\pi} \frac{|g_u(x)|}{\left|\log|g_u(x)|\right|^{1+\varepsilon}+1}\,dx = \sum_{\nu=1}^{u} \int_{e_\nu - e_{\nu+1}} \frac{|g_u(x)|}{\left|\log|g_u(x)|\right|^{1+\varepsilon}+1}\,dx$$

今 $\phi(x)=\dfrac{x}{|\log x|^{1+\varepsilon}+1}$, $(x>0)$トオキ.

$$\psi(x)=\phi(x) \quad \text{for} \quad 0<x\leqq 1,$$
$$=\text{linear} \quad 1\leqq x\leqq e^{\varepsilon},$$
$$=\phi(x) \quad e^{\varepsilon}\leqq x<\infty$$

トスルト $\psi(x)$ ハ monotone increasing =ナリ且ツ $|\phi(x)|\leqq A|\psi(x)|$ 且ツ $|\psi(x)|\leqq A|\phi(x)|$. (以下 A ハ absolute constant ヲ表ハシ場所場所デ異ッテオッテモヨイトスル)

ソウスルト

$$\int_0^{2\pi}\frac{|g_u(x)|}{|\log|g_u(x)||^{1+\varepsilon}+1}dx\leqq A\sum_{r=1}^{u}\int_{e_r-e_{r+1}}\psi(|g_u(x)|)\,dx$$

$$\leqq A\sum_{r=1}^{u}\psi(r)\,(\mu_r-\mu_{r+1})$$

$$\leqq A\sum_{r=1}^{u}\frac{r}{|\log r|^{1+\varepsilon}+1}\,(\mu_r-\mu_{r+1})$$

$$\leqq A\sum_{r=1}^{u-1}\mu_{r+1}\left(\frac{r+1}{|\log(r+1)|^{1+\varepsilon}+1}-\frac{r}{|\log r|^{1+\varepsilon}+1}\right)+A\mu_1.$$

サテ r が充分大ナルトキ

$$\frac{r}{|\log(r+1)|^{1+\varepsilon}+1}-\frac{r}{|\log r|^{1+\varepsilon}+1}=O\left(\frac{1}{\log^{1+\varepsilon}r+1}\right)$$

デアルカラ

$$\leqq A\sum_{\nu=1}^{u-1}\mu_\nu\cdot\frac{1}{\log^{1+\varepsilon}\nu+1}+A\mu_1.$$

$$\leqq A\int_0^{2\pi}|f(x)|\,dx\cdot\sum_{\nu=1}^{u-1}\frac{1}{\nu(\log^{1+\varepsilon}\nu+1)}\quad(\text{Lemma 4 ヲ})$$

$$\leqq A\int_0^{2\pi}|f(x)|\,dx.$$

$K\to\infty$ トシテ定理ガ証明サレタ．

Theorem 2. $f(x)$ ヲ $(0,2\pi)$ デ L_1 ニ属スルトシ，ソノ Fourier series ノ partial sum ヲ $S_n(x)$ トスルト

$$\int_0^{2\pi}\frac{|f(x)-S_n(x)|}{\left|\log|f(x)-S_n(x)|\right|^{1+\varepsilon}+1}\,dx\to 0.\quad(n\to\infty).$$

証明．容易ニ $\phi(2x)\leqq A\phi(x)$ ナルコトガ分ルカラ

$$\phi(x+y)\leqq A\psi(x+y)\leqq A\psi(2\,Max(x,y))$$
$$\leqq A\big(\psi(2x)+\psi(2y)\big)\leqq A\big(\psi(x)+\psi(y)\big)$$
$$\leqq A\big(\phi(x)+\phi(y)\big).$$

$$S_n(x)=\frac{\cos nx}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(x+t)\sin n(x+t)}{\tan\frac{t}{2}}\,dt$$
$$-\frac{\sin nx}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(x+t)\cos n(x+t)}{\tan\frac{t}{2}}\,dt+O(1).$$

$g(x)$, $h(x)$ ヲ $f(x)\sin nx$, $f(x)\cos nx$ ノ conjugate function トスルト

$$\int_0^{2\pi} \frac{|S_n(x)|}{|\log|S_n(x)||^{1+\varepsilon}+1}\,dx \leqq A\int_0^{2\pi} \phi\Big(\Big|\frac{\cos nx}{2\pi} g(x)\Big| + \Big|\frac{\sin nx}{2\pi} h(x)\Big| + O(1)\Big)\,dx$$

$$\leqq A\int_0^{2\pi} \phi\Big(\Big|\frac{\cos nx}{2\pi} g(x)\Big|\Big)\,dx + A\int_0^{2\pi} \phi\Big(\Big|\frac{\sin nx}{2\pi} h(x)\Big|\Big)\,dx + O(1)$$

$$\leqq A\int_0^{2\pi} \phi(|g(x)|)\,dx + A\int_0^{2\pi} \phi(|h(x)|)\,dx + O(1)$$

$$(1) \quad \leqq A\int_0^{2\pi} |f(x)|\,dx + O(1) \qquad (\text{Theorem 1 カラ})$$

今 $\int_0^{2\pi} \phi(|f(x)-f_1(x)|)\,dx < \delta$ 及ビ $\int_0^{2\pi} |f(x)-f_2(x)|\,dx < \delta$

ヲ満足スルヤウニ任意ノ正数 δ ニ對シテ differentiable function $f_1(x)$ ヲトル、之ハ可能デアル。(拙著、函数列ノ強收斂、弱收斂ニ就テ、綜合報告、數物會誌)。$f_1(x)$ ノ Fourier series ノ partial sum ヲ $S_n^{(1)}(x)$ トスルト $S_n^{(1)}(x) \longrightarrow f(x)$ ガ一樣ニ成リ立ツ。故ニ

$$\int_0^{2\pi} \phi(|f_1(x)-S_n^{(1)}(x)|)\,dx \longrightarrow 0$$

今 $f(x)-f_1(x)=f_2(x)$ トオキ $f_2(x)$ ノ Fourier series ノ partial sum ヲ $S_n^{(2)}(x)$ トスルト (1) カラ

$$\int_0^{2\pi} \phi\left(\left|S_n^{(2)}(x)\right|\right) dx \leqq A\int_0^{2\pi} \left|f_2(x)\right| dx + O(1) \leqq A\delta + O(1).$$

故＝

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \int_0^{2\pi} \phi\left(\left|f(x) - S_n(x)\right|\right) dx$$

$$\leqq A \overline{\lim_{n\to\infty}} \int_0^{2\pi} \phi\left(\left|f_1(x) - S_n^{(1)}(x)\right|\right) dx + A \overline{\lim_{n\to\infty}} \int_0^{2\pi} \phi\left(\left|f_2(x)\right|\right) dx$$

$$+ A \overline{\lim_{n\to\infty}} \int_0^{2\pi} \phi\left(\left|S_n^{(2)}(x)\right|\right) dx \leqq A\delta + O(1)$$

之デ Theorem ノ証明ガ終ワル。