OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	超越直徑ト測度トノ関係 II
Author(s)	角谷, 靜夫
Citation	全国紙上数学談話会. 1935, 70, p. 14-19
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74222
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

300. 超越直径ト測度トノ関係 II

角谷静夫（阪大）

$h(t)$ ヲ $t>0$ ニ於テ定義サレタ正ノ連続函数デ $t\to 0$ ナルトキ $h(t)\downarrow 0$ ナルモノトスルトキ有界集合 E ノ h-測度（精確ニハ h-外測度）ヲ次ノ如ク定義スル。

集合 E ヲ半径 ρ_{rn} ガ δ ヲ超エナイ有限個又ハ可附番個ノ円ニテ覆ヒ、カヽルアラユル覆ヒ方ニ對スル $\sum h(\rho_{rn})$ ノ下限ヲ $m_h(E,\delta)$ トスレバ $m_h(E,\delta)$ ハ $\delta\to 0$ ナルトキ単調非減少デアル。

$$\lim_{\delta\to 0} m_h(E,\delta)=m_h(E) \qquad (\text{有限又ハ}\infty)$$

ヲEノ h-測度ト云フ。

278号ニ於テハ $h(t)=\dfrac{1}{\log\frac{1}{t}}$ ナルトキ $m_h(E)=0$

ナラバEノ超越直径が0ナルコトヲ示シタ。逆ニEノ超越直径が0ナラバ

$$\lim_{r\to 0}\int_r \frac{h(t)}{t}\,dt \qquad (5)$$

が存在スル如キ $h(t)$ ニ対シテ $m_h(E)=0$ ナルコトハ H. Cartan, Ahlfors, Frostmann 等ノ結果ヲ綜合スレバ容易ニ示サレル。

シカルニ (5) が存在スル如キ $h(t)$ ト $\dfrac{1}{\log\frac{1}{t}}$ トノ間ニハマダ相当ノ距リガアル。

次ニ $h_1(t)=\dfrac{1}{\log\frac{1}{t}}$ ニヨル測度 >0, $\dfrac{1}{\log\log\frac{1}{t}}$ ニヨル測度0ニテ且ツ超越直径0ナル有界開集合Eノ例ヲ作ラウ。

$$\Delta_n=2e^{-2^n},\quad n=1,2,\cdots\cdots$$

トオキ長サ $\Delta_0=\dfrac{2}{e}$ ナル開区間ニ Cantor ノ操作ヲホドコス。但シコノ際ソ回目ニ取リ去ル開区間ノ長サハ何レモ $\Delta_{n-1}-2\Delta_n$, デアリ n 回ノ操作ノ後ニハ 2^n 個ノ長サ Δ_n ナル開区間ガ残ルモノトスル。※

※ $2\Delta_n<\Delta_{n-1}$. $n=1,2,\cdots\cdots$ デアル。

コノ操作ヲイクラ行ッテモ取リ去ラレナイ点全体ノ集合Eハ完全集合デ上記ノ性質ヲモッテヰル。

先ヅ任意ノ$\delta>0$ニ對シテ$\Delta_n<\delta$ナルΔ_nヲ取レバEハ明カニ2^n個ノ長サ$\Delta_n+\varepsilon$($<\delta$)ナル開區間ニテオホヘルカラ（円デ覆ッタト考ヘレバ半径ハ$\frac{\Delta_n+\varepsilon}{2}$トナル）

$$m_{h_2}(E,\delta)\leqq 2^n\frac{1}{\log\frac{2}{\Delta_n+\varepsilon}\log\log\frac{2}{\Delta_n+\varepsilon}}.$$

εハイクラデモ小サク取レルカラ

$$m_{h_2}(E,\delta)\leqq\frac{2^n}{\log\frac{2}{\Delta_n}\log\log\frac{2}{\Delta_n}}=\frac{2^n}{2^n n\log 2}$$

$$=\frac{1}{n\log 2}$$

nハイクラデモ大キクトレルカラ$m_{h_2}(E,\delta)=0$，$\delta>0$ハ任意デアッタカラ$m_{h_2}(E)=0$デアル。

次ニnヲ任意ノ正整数トシ、Cantorノ操作ヲn回行ッタ後ニ残ッタ長サΔ_nナル2^n個ノ閉區間ノ中点ヲ大々$\zeta_{n,1},\zeta_{n,2},\cdots\cdots,\zeta_{n,2^n}$トスル。$2^n$次ノ多項式

$$P_{2^n}(\zeta)=(\zeta-\zeta_{n,1})(\zeta-\zeta_{n,2})\cdots\cdots(\zeta-\zeta_{n,2^n})$$

ヲ考ヘレバ$\zeta\in E$ナル任意ノζニ對シテ

$$\left|P_{2^n}(\zeta)\right|\leqq\Delta_n\cdot\Delta_{n-1}\cdot\Delta_{n-2}^{2}\cdots\cdots\Delta_{n-k}^{2^k}\cdots\cdots\Delta_0^{2^n}$$

$$=2\cdot e^{-2^n}\cdot 2e^{-2^{n-1}}\cdot\left(2e^{-2^{n-2}}\right)^2\cdots\cdots\left(2\cdot e^{-2^{n-k}}\right)^{k}\cdots\cdots\left(2e^{-2}\right)^{2^{n-1}}$$

$$= 2^{2^n} \cdot e^{-2^n} \cdot \underbrace{e^{-2^{n-1}} \cdot e^{-2^{n-1}} \cdots\cdots e^{-2^{n-1}} \cdots\cdots e^{-2^{n-1}}}_{n\text{個}}$$

$$= 2^{2^n} \cdot e^{-(n+2)2^{n-1}}$$

$$\left|P_{2^n}(2)\right|^{\frac{1}{2^n}} \leqq 2 \cdot e^{-\frac{n+2}{2}}$$

又ハEノ任意ノ点デアリ、nハイクラデモ大キク取ルコトガ出來タカラ、コレハEノ超越直徑が0ナルコトヲ示シテヰル。

最後ニ $m_{h_1}(E) > 0$ ナルコトヲ示サウ。コノタメニハ

$$\sum h_1(\rho_n) \geqq C > 0$$

ガアラユルEノ覆ヒ方ニ對シテ成立スル如キCが存在スルコトヲ示セバヨイ。Eハ閉集合デアルカラ Borel-Lebesgue ノ定理ニヨリEヲ有限個ノ開區間ニテ覆フ場合ノミヲ考ヘレバヨイ。　Eヲ有限個ノ開區間 I_m $(m = 1, 2, \cdots\cdots, N)$ ニテ覆ツタトセヨ。若シ二ツノ $I_m, I_{m'}$ ニ共通点ガアレバ各々ヲ適當ニテ ゞメルコトニヨツテ $E \cap (I_m + I_{m'})$ ハソノママデ $I_m, I_{m'}$ ニハ共通点ガナイヤウニスルコトが出來ル。（コレハEが nondense デアルカラ開區間 $I_m \times I_{m'}$ 内ニEノ点ヲ含マナイ 開區間が存在スルコトヨリ明ラカデアル）

$h_1(t)$ ハ單調デアルカラ各ノ I_m ヲ縮メテモ $\sum h(\rho_m)$ ハ増ヘナイ。ヨツテ始メカラ I_m ノドノ二ツニモ共通点がナ

イトシテオイテ良イ。

I_m ハ共通点ヲ持タナイカラ番号ヲ直線上ノ順ニヨッテツケタモノト考ヘテヨイ。相隣ル I_m, I_{m+1} ノ間ニ挟マレタ開區間ハ E ニ屬シナイカラ上記ノ Cantor ノ操作ノ n_m 回目ニ取リ去ラレテヰル。 $\max_{1\leqq m\leqq N-1} n_m = n_0$ トオク。

$n \geqq n_0$ ナルトキ、n 回ノ Cantor ノ操作ノ後ニ殘ル 2^n 個ノ長サ Δ_n ナル開區間ハ何レモドレカノ I_m ($1 \leqq m \leqq N$) ニ含マレル。今 I_m ノ長サヲ ρ_m トスルトキ

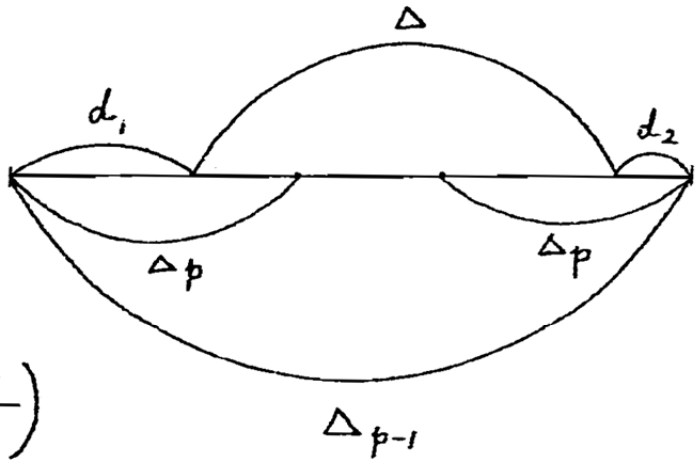
$$\sum_{m=1}^{N} h_1(\rho_m) \geqq 2^n \cdot h_1\left(\frac{\Delta_n}{2}\right) = 1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

ナルコトヲ示セバ $C=1$ ト取レルコトガワカル。

コノタメニハ右圖ニ於テ

$$\Delta = \Delta_{p-1} - d_1 - d_2$$

$$0 < d_1, d_2 < \Delta_p$$



ナルトキ

$$h_1\left(\frac{\Delta}{2}\right) \geqq h_1\left(\frac{\Delta_p - d_1}{2}\right)$$

$$+ h_1\left(\frac{\Delta_p - d_2}{2}\right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (7)$$

ナルコトヲ示セバ十分デアル。※※ 原点ノ十分近傍 $0 < t < \delta$ ニ

※※ コノ關係ヲ順次繰返シテ I_m ヲ細分シテ行キ、各々ノ Δ_n ノ長サノ區間ガ一ツ宛ツ I_m ニ含マレルヤウニスレバ (6) ガ得ラレル。

テ $h_1(t)$ ハ凹函数（$h_1''(t)<0$）デアルカラ

$$h_1\left(\frac{\Delta_{p-1}}{2}\right)-h_1\left(\frac{\Delta}{2}\right)=\left\{h_1\left(\frac{\Delta_{p-1}}{2}\right)-h_1\left(\frac{\Delta_{p-1}-d_1}{2}\right)\right\}$$

$$+\left\{h_1\left(\frac{\Delta_{p-1}-d_1}{2}\right)-h_1\left(\frac{\Delta_{p-1}-d_1-d_2}{2}\right)\right\}$$

$$\leqq\left\{h_1\left(\frac{\Delta_p}{2}\right)-h_1\left(\frac{\Delta_p-d_1}{2}\right)\right\}$$

$$+\left\{h_1\left(\frac{\Delta_p}{2}\right)-h_1\left(\frac{\Delta_p-d_2}{2}\right)\right\}$$

ガ成立スル。

$$h_1\left(\frac{\Delta_{p-1}}{2}\right)=2h_1\left(\frac{\Delta_p}{2}\right)$$

ナルコトヲ用フレバ (ワ) ガ得ラレル。

コレデ上記ノ E ノ性質ガスベテ証明サレタ。