OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	多元環ノ Ideal ノ最小公倍数, 最大公約数
Author(s)	中山, 正
Citation	全国紙上数学談話会. 1935, 71, p. 14-19
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74230
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

308. 多元環ノIdealノ最小公倍數,最大公約數

中山　正（阪大）

Aヲ代數体Kノ上ノ多元環トシ，$\mathfrak{a}, \overline{\mathfrak{a}}$ ヲAニ於ケル二ツノIdealトスル、タダシ多元環ノIdealトハ ungleichseitig デモヨイガ、ソノ Links- 並ビニ Rechts-ordnung ガ Maximalordnung デアル如キモノヲ云フ.（左又ハ右ドチラカノ Ordnung ガ Maximalordnung デアレバ他方モソウデアル）、即チ Dedekind ノ呼ビ方ニ隨ヘバ normal ナモノヲ云フコトニスル。

$\mathfrak{a}$ ト $\overline{\mathfrak{a}}$ ノ Summe（gr. gem. Teiler）$(\mathfrak{a}, \overline{\mathfrak{a}})$ ガ再ビIdealデアルタメニハ，Kノ如何ナルPrimideal $\mathfrak{p}$ ニツイテモ

1) $\mathfrak{a}_\mathfrak{p} \equiv \overline{\mathfrak{a}}_\mathfrak{p}$ 又ハ $\mathfrak{a}_\mathfrak{p} \subseteq \overline{\mathfrak{a}}_\mathfrak{p}$

2) $\mathfrak{a}_\mathfrak{p}$ ノ Linksordnung ガ $\overline{\mathfrak{a}}_\mathfrak{p}$ ノソレト一致スル.

3) $\mathfrak{a}_\mathfrak{p}$ ノ Rechtsordnung ガ $\overline{\mathfrak{a}}_\mathfrak{p}$ ノソレト一致ス

ル。

ナル三條件ノドレカガ滿サレテヰルコトガ必要且ツ充分デアル。

Durchschnitt (kl. gem. Vielfache) $\mathfrak{a}\cap\overline{\mathfrak{a}}$ ガ Ideal ナルタメニモ全然同ビデアル、即チ $\mathfrak{a}\cap\overline{\mathfrak{a}}$ ガ Ideal ナルトキ $(\mathfrak{a},\overline{\mathfrak{a}})$ モソウデアリ、又ソノ逆ニモナル。

ハジメ以上ノ結果ヲ予想シテ特殊ノ場合ニツイテ角谷氏等ノ御助力ヲ得テ計算シテ見タ所確カニソノ場合ニハ成立シマシタノデ、一般ノ場合ニツイテ証明ヲ試ミマシタ、概要ヲ述ベマス。

(証明) $(\mathfrak{a},\overline{\mathfrak{a}})$ ガ Ideal ナルタメニハドノ $\mathfrak{p}$ ニツイテモ $(\mathfrak{a}_\mathfrak{p},\overline{\mathfrak{a}}_\mathfrak{p})$ ガ $\gamma_\mathfrak{p}$ ノ Ideal ナルコトガ必要且ツ充分、又 γ が einfach デ K ガソノ Zentrum ナル時ニ証明スレバヨイ。

1), 2), 3) ノドレカガ成立スレバ $(\mathfrak{a}_\mathfrak{p},\overline{\mathfrak{a}}_\mathfrak{p})$ ガ Ideal ナルコトハ明カデ、逆ノ方ガ我々ノ目的デアリマス、以下一ツノ Primideal ノミ考ヘマスカラ $\mathfrak{p}$ ヲ省略シ、$\mathfrak{a}_\mathfrak{p}$, $\overline{\mathfrak{a}}_\mathfrak{p}$ ノ代リニ $\mathfrak{p}$ トカキ、K ヲ $\mathfrak{p}$-進数体トスル。

今 $(\mathfrak{a},\overline{\mathfrak{a}})$ ガ Ideal ナリトスレバ $\mathfrak{a},\overline{\mathfrak{a}}$ ハ eigentliche Multiplikation ノ意味デ

$$\mathfrak{a}=\mathfrak{G}(\mathfrak{a},\overline{\mathfrak{a}})\mathfrak{L},\qquad \overline{\mathfrak{a}}=\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{a},\overline{\mathfrak{a}})\overline{\mathfrak{L}}$$

トカケル、コヽニ $\mathfrak{G},\mathfrak{L},\overline{\mathfrak{G}},\overline{\mathfrak{L}}$ ハ ganz + Ideal.

シカシテ 1), 2), 3) ノドレモ成立シナケレバ容易ニワカル如ク

a) $\mathfrak{b} \neq \mathfrak{o}_L$ 且ツ $\overline{\nu} \neq \mathfrak{o}_R$

b) $\overline{\mathfrak{b}} \neq \mathfrak{o}_L$ 且ツ $\nu \neq \mathfrak{o}_R$

ノ少クモ一方ガ成立ツ、但シ $\mathfrak{o}_L$, $\mathfrak{o}_R$ ハ $(\alpha, \overline{\alpha})$ ノ左，右-Ordnung トスル、ドチラデモ同様ダカラ今 a) ガ成立ツトスル。

然ルニ

$$(\alpha, \overline{\alpha}) = (\mathfrak{b}(\alpha, \overline{\alpha})\nu,\ \overline{\mathfrak{b}}(\alpha, \overline{\alpha})\overline{\nu})$$

カラ

$$(\alpha, \overline{\alpha}) = (\mathfrak{b}(\alpha, \overline{\alpha}),\ (\alpha, \overline{\alpha})\overline{\nu})$$

ガ導カレ、$(\alpha, \overline{\alpha}) = \mathfrak{o}_L\alpha$ （α ハ Nichtnullteiler in $\mathfrak{o}_L$）トスレバ容易ニ

$$\mathfrak{o}_L = (\mathfrak{b}, \alpha\overline{\nu}\alpha^{-1})$$

トナル、コゝニ $\mathfrak{b}, \alpha\overline{\nu}\alpha^{-1}$ ハソレゾレ $\mathfrak{o}_L$ ノ gang ナ右-，左- Ideal デシカモ $\mathfrak{o}_L$ ト一致シナイ、依ッテ一般ニ $\mathfrak{p}$ 進数体 K ヲ Zentrum ニ持ツ einfache Algebra A ノアル Maximalordnung $\mathfrak{o}$ ノ gang ナ右- 並ビニ左- Ideal m, n ガ $m \neq \mathfrak{o}$, $n \neq \mathfrak{o}$ ナラバ $(m, n) \neq \mathfrak{o}$ ナルコトヲ証明スレバヨイ。

ソレニハ A ヲ適当ナ $\mathfrak{p}$ 進多元体 D ノ Matrizen-algebra トシテ，シカモ $\mathfrak{o}$ ガ D ノ gang ナ元ノ行列全体ニナルヤウニ表ハス： $A = D_r$. 然ラバ m, n ハソレゾ

レ

$$\beta=\begin{cases} \pi^{\mu_1} & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ c_{21} & \pi^{\mu_2} & 0 & \cdots\cdots 0 \\ c_{31} & c_{32} & \ddots & \\ \cdots\cdots & & & \\ c_{r1} & c_{r2} & \cdots\cdots & \pi^{\mu_r} \end{cases}, \qquad \gamma=\begin{cases} \pi^{\nu_1} & d_{12} & \cdots\cdots & d_{1r} \\ 0 & \pi^{\nu_2} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots\cdots & 0 & \pi^{\nu_r} \end{cases}$$

デックラレタ右ー，並ビニ左-Ideal ニナル、但シπハ D ノ Prim ideal ノ Prim element，$\mu_i, \nu_i \geqq 0$，c_{ik} ハ $\mathrm{mod}\,\pi^{\mu_i}$ デ、d_{ik} ハ $\mathrm{mod}\,\pi^{\nu_k}$ デキマル、而シテ $m, n \neq 0$ ナラ0デナイ μ, ν ガ存在スル、ヨッテ

$$\mu_1=\mu_2=\cdots\cdots=\mu_{i_0-1}=0, \quad \mu_{i_0}>0$$

$$\nu_1=\nu_2=\cdots\cdots=\nu_{k_0-1}=0, \quad \nu_{k_0}>0$$

トスル、$c_{i,k}\,(i<i_0)=0$，$d_{i,k}\,(k<k_0)=0$ トシテヨイ。

然ルニ $(m, n)=0$ ナラバ (m, n) ニハ

$$\xi=\begin{matrix} \\ i_0 \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\overset{k_0}{\begin{pmatrix} 0 & \cdots\cdots & 0 & * & \cdots\cdots & * \\ & & 0 & 0 & \cdots\cdots & \\ 0 & \cdots\cdots & 0 & 1 & * & \cdots\cdots * \\ * & & & & & * \\ * & & & & & * \end{pmatrix}}$$

ナルξガアルガ，實際ニ

$$\xi = \beta(a_{i,k}) + (\bar{a}_{i,k})\gamma$$

（但シ $a_{i,k}$, $\bar{a}_{i,k}$ ハ D ノ ganz ナ元）トオクト

$$a_{i,k} + \bar{a}_{i,k} = 0 \quad (i < i_0,\ k < k_0)$$

$$a_{i,k_0} + \sum_{k=1}^{k_0-1} \bar{a}_{i,k}\, d_{k,k_0} \equiv 0 \mod \pi \quad (i < i_0)$$

$$\sum_{i=1}^{i_0-1} c_{i_0,i}\, a_{i,k} + \bar{a}_{i_0,k} \equiv 0 \mod \pi \quad (k < k_0)$$

$$\sum_{i=1}^{i_0-1} c_{i_0 i}\, a_{i k_0} + \sum_{k=1}^{k_0-1} \bar{a}_{i_0,k}\, d_{k,k_0-1} \equiv 1 \mod \pi$$

トナル、今第二ノ（i_0-1）個ノ式ニ左カラ（掛算ハミナ nichtkommutativ）ソンゾレ $c_{i_0 i}$ ヲ掛ケ，第三ノ（k_0-1）個ニ右カラ d_{k,k_0} ヲ乗ジテ全部加ヘ合セル、而シテ第一ノ式ヲ代入スレバ容易ニ第四ノ式ガ矛盾ニナル。コレデ主張ノ前半ガ証明サレタ。

最小公倍数 α ハ $\overline{\alpha}$ ニツイテモ，類似ノ考察ニヨッテ

$$\pi O \neq m \cap n$$

ナル式ノ証明ニ帰セラレル。但シ π, O ハ前ト同ジ意味、（従ッテ πO ハ O, zweiseitig, Primideal）且ツ m, n ハ πO, echter Teiler ナル O, 右- 並ビニ左- 整 Ideal トスル、然ラバ $\mu_i \leqq 1$, $\nu_i \leqq 1$ デ且ツ $0 = \pi^{\mu} \nu$, ν ガ存在スル．今

$$\mu_r = \mu_{r-1} = \cdots\cdots = \mu_{i_0+1} = 1, \quad \mu_{i_0} = 0$$

$$\nu_r = \cdots\cdots\cdots = \nu_{k_0+1} = 1, \quad \nu_{k_0} = 0$$

トシ，

$$a_{i,k}=\bar{a}_{i,k}=0 \qquad (i<i_0 \text{ oder } k<k_0)$$

$$a_{i_0,k_0}=\bar{a}_{i_0k_0}=1$$

$$a_{i_0,k}=d_{k_0,k} \qquad (k_0<k\leqq r)$$

$$\bar{a}_{i,k_0}=c_{i,k_0} \qquad (i_0<i\leqq r)$$

$$a_{i,k_0}=0 \quad (i_0<i), \quad \bar{a}_{i_0,k}=0 \quad (k_0<k)$$

$$a_{i,k}=\bar{a}_{i,k}=0 \qquad (i_0<i \text{ 且ツ } k_0<k)$$

トスルト $\beta(a_{i,k})=(\bar{a}_{i,k})$ ノトナッテ、コレハ $m\cap n$ ニ属シ，然モ (i_0,k_0) ノ所ハ1デアルカラ $\pi 0$ ニハ属サナイ、故ニ $\pi 0\neq m\cap n$ デ，主張ガ証明サレタコトニナル。

ナホ我々ノ條件ガ満サレテヰルトキニハ

$$N(\alpha\wedge\bar{\alpha})N((\alpha,\bar{\alpha}))=N(\alpha)N(\bar{\alpha})$$

ナルコトハ勿論容易ニ証明サレマス。