



Title	” $\det.A \neq 0$ ナル Matrix ハ $A = \exp.B$ ”ノ正田教授ニヨル証明其他
Author(s)	吉田, 耕作
Citation	全国紙上数学談話会. 1935, 72, p. 1-6
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74231
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

309. "det. $A \neq 0$ + 11 matrix $A = \exp. B$ ", 正田教授ニヨル証明其他

吉田耕作(阪大)

先日正田教授ト Schröder, 論文 *Einige Sätze aus der Theorie der kont. Gruppen linearer Transf.*, Dissertation, Berlin. ヲミテアリマシタラ

複素数体 K ノ上ノ n 次, matrix A ガ $\det. A \neq 0$ ナラバ同ジク K ノ上ノ n 次, matrix B テ

$$A = \exp. B = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B^m}{m!}, \quad B^0 = E \text{ (単位行列)}$$

ナレ如キモノガアル。

ヲ直接的ナ計算? デ示シテアリマシタ。正田教授ニヨレバ之ハ次ノ如キ考ヘ方デ簡單ニ証明出来マス。尚南雲教授ハ之ヲ "距離付ケラレタ Ring" ニ擴張サレマシタ (本紙論文)。以下ニ御紹介致シマス。

先ヅ $A = \exp. B$ ト書ケルカドウカハ A ヲ transform シテモ変ラナイ。何者、 $PAP^{-1} = \exp. (PBP^{-1})$ ダカラ。又 $A = \text{scalar } a$ ヲカケテモ変ラナイ。何者 $aA = (aE)A = \exp. \{(\log a)E\} A, = \exp. \{(\log a)E + B\} ((\log a)E$ ハ全テノ matrix ト commutative) ダカラ。又

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

ナラバ A_1, A_2 ノミツイテ証明スレバヨイ。何者 $A_1 = \exp.(B_1)$,
 $A_2 = \exp.(B_2)$,

$$B_1 = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$$

トスレバ B_1 ト B_2 トハ commutative 歟カラ

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} = \exp.(B_1 + B_2)$$

トナルカラ。

依ツテ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ノトキノミ証明スル。 $A-E$ ハ nilpotent; $(A-E)^{n-1} = 0$;
 歟カラ

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} (A-E)^{\nu}$$

ハ convergent. ヲツテ

$$\exp. \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} (A-E)^{\nu} \right)$$

ガ意味ヲ有シ之レハ A トナル。何者、 $(A-E)^{\nu}$; $\nu=0, 1, 2, \dots$
 -----ハ互ニ commutative 歟カラ、 $|x-1| < 1$ ナル
 scalar x = 對シ

$$\exp. \{ \ln[(1-x)^0 - (1-x)] \}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left\{ \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} \left[(1-x)^0 - (1-x) - 1 \right]^{\nu} \right\}$$

⇒ formal = (1-x) / power series = 展開シタト
キ

$$(1-x)^0 - (1-x) = x$$

ヲ得ルコト = 比較スレバワカル。

— 以上 —

上ノ定理 = ヨレバ本紙 = 於ケル正田教授ノニツノ論文

(288, 295) = ヨルト K = 於ケル matrix equation

$$\exp. A \exp. B \exp. (-A) \exp. (-B) = \exp. (CD - DC)$$

ハ A, B ヲ與ヘレバ C, D が、又 C, D ヲ與ヘレバ A, B が
定マル (必ズシモ一意デナイ) 如キモノデアルコトガワカル。

尚正田教授ハ次ノ如キ手紙ヲ寄セラレタ。

Satz. Determinate 1, reelle Matrix ハニ
ツ, reelle + Kommutator, Produkt トシテ表ハ
セル。

コレヲ証明スルノ = Hilfssätze カラ始メマス。

Hilfssatz 1. Körper K, 中, Matrix ハ Eigen-
wert が K = 含マレルナラ K, 中, Kommutator デ
アル。

Beweis. 紙上談話會 = 書イタノ = 同ジ。

Hilfssatz 2. Matrix $\begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ハ a ヲ含ム Körper,
中, Kommutator デアル。

Beweis. $\begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

両方, Eigenwert ± 1

従って $\begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ と同 Matrix, Kommutator

である。

Hilfssatz 3. $\begin{pmatrix} p & \bar{p} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & \bar{p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & \bar{p} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} p+\bar{p} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, p\bar{p}=1$

Beweis. 計算 = ヨリ 開カ。

Satz, 証明.

Matrix A : reell $\rightarrow$ 範囲 $\neq$ Normalform

$$\begin{pmatrix} A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & \ddots \\ & & & A_m \end{pmatrix}$$

= transform シマス。 $|xE - A_i|$ は irreducibles Polynom, Potenz デス。コノ各々 = ヱイテ考ヘマス。

$|xE_i - A_i|$ が irreducibles Polynom $q_i(x)$, Potenz デアルトスルト $q_i(x)$, grad は 1 か 2 デス。

先づ $A_i = \alpha_i A_i^*$, $|A_i^*| = 1$ ナル 實数 α_i が存在スルコ

トヲ証明シマス。

$q(x)$, Grad 1 ナラバ

$$A_i \sim \alpha_i F_i, \quad F_i = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \quad F_i = A_i^*.$$

$\varphi(x)$, grad 2 + ラバ, $\varphi(x) = x^2 + ax + b$, b は絶
 対値故 pos.

故 $= |A_i| = \beta^{\frac{n}{2}}$, n , matrix, grad, $\alpha_i = \sqrt{b}$ と置
 けバ

$$A_i \sim \alpha_i A_i^*$$

故 $=$

$$A \sim \begin{pmatrix} \alpha_1 E_1 & & \\ & \alpha_2 E_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \alpha_m E_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1^* & & \\ & A_2^* & \\ & & \ddots \\ & & & A_m^* \end{pmatrix}$$

左側, matrix の Hilfssatz 1 = アル reell + Kommutator.
 問題ハ右側, matrix が Kommutator + ルコトヲ
 示ス = アル。ソレ = ハ各々, A_i^* ニツイテ証明スルベヨイ。
 $\varphi_i(x)$, grad 1, トキハ夫張リ Hilfssatz 1 = アル
 Kommutator = アル。

$\varphi_i(x)$, grad 2 トスル。

$$A_i^* \sim B = \begin{pmatrix} p\bar{p} & 0 \\ 0 & \bar{p}p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & \bar{p} \end{pmatrix} \times \bar{p} \quad (\text{Kronecker, Produkt})$$

$$\sim \begin{pmatrix} p+\bar{p} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \bar{p} \quad (\text{Hilfssatz 3})$$

$$= M_1 M_2 M_1^{-1} M_2^{-1} \times N_1 N_2 N_1^{-1} N_2^{-1} \quad (\text{Hilfssatz 2, 1})$$

$$= (M_1 \times N_1) (M_2 \times N_2) (M_1 \times N_1)^{-1} (M_2 \times N_2)^{-1}$$

コレヲ証明出来マシタが餘リ簡單デハアリマセンデシタ。

Schröder ハドンナニ証明シタオ知リマセンが先ハ御報告

申上マス。

昭和十年度七月——十二月分會費

未拂込ノ方ハ至急下記(振替貯金)
へ御拂込ミ下サイ。

(會費未納ノ方多キ爲ニ最近財政困難
デスカラ是非至急御願ヒ致シマス。)

大阪市北区

大阪帝國大學
理學部數學教室

清水辰次郎

口座番號 大阪一七七四三番

本誌上ニ於ケル論文ハナルベク10頁以内ニ御願ヒ
致シマス。