



Title	距離付ケラレタ環ニ於ケル方程式 $A=ex$
Author(s)	南雲, 道夫
Citation	全国紙上数学談話会. 1935, 72, p. 6-11
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74232
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

310. 距離付ケラレタ環 = 於ケル方程式 $A = e^X$

南 雲 道 夫 (阪大)

[1] 距離付ケラレタ環トハ、實數又ハ複素數ヲ *Operator* (係數トシテ掛ケルコト) トシテ有スル環 (*Element* ノ和及ビ積が定義サレ、和=ツイテハ *Abel* 群、積=ツイテハ組合セ、法則及ビ分配ノ法則が成立スルモノ) $\mathcal{R}$ デ、ソノ上 $\mathcal{R}$ ノ各要素=ハ次ノ性質ヲ有スル絶對値が定義サレテキルモノヲ云フ。

$$A \neq 0 \text{ノ時 } |A| > 0. \quad |A+B| \leq |A| + |B|. \quad |aA| = |a| |A|.$$

$$|AB| \leq |A| \cdot |B|.$$

尚 $\mathcal{R}$ ハ距離空間 ($|A-B|$ ヲ A, B ノ距離トス) トシテ完全 (*Cauchy* ノ收斂條件が成立スルコト) デアルト假定スル。

一般=完全ナ線狀距離空間=於ケル有界ナ一次変換ノ全体 (非可逆的ノモノモ含ム) ハ上ノ意味=於ケル距離付ケラレタ環デアル。

次=距離付ケラレタ環 $\mathcal{R}$ ハ特=單位 E ヲ含ムモノトシ

$$\text{Exp}(A) = e^A = E + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$

=ヨツテ e^A ヲ定義スル。 ($\mathcal{R}$ = 於ケル絶對値ノ性質及ビ $\mathcal{R}$

が完全ナルコト=ヨリ意味確定) 特=

$$AB=BA \text{ ナラバ } e^A e^B = e^{A+B}$$

デアルが, 一般ニハサウハ行カナイ。

$$\text{又 } \lg A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (E-A)^n$$

= ヨツテ $\lg A$ ヲ定義スレバ, 之ハ $|A-E| < 1$ ナルトキ意味ヲ持ツ。

$|A-E| < 1$ ナルトキハ

$$\text{Exp.}(\lg A) = A.$$

又 $|A| < \log 2$ ナラバ

$$\lg(\text{Exp.}(A)) = A.$$

$A = e^B$ ナラバ A ハ *infinitesimal transformation* カラ生ズル可換群 e^{tB} ニ属スル。(t ハ実数)

[2] 扱テ以上ノ環 $\mathcal{R}$ ニ於テ A ガ興ヘラレタル要素トシ X ヲ未知ノ要素トスルトキ方程式

$$A = e^X$$

ガ解ケル條件ヲ研究スルノガ目的デアルガ未ダ満足ノ行ク所マデハ出来テキナイ (一ツノ必充條件ハ得ラレテキルガ, 應用上之デハツシ物足りナイ)

Lemma 1. $|A-E| < 1$ ナラバ $A = e^X$ ハ常ニ解ケル。

証明ハ $X = \lg A$ トスレバ明カ。

定理 1. $A = e^X$ ガ $\mathcal{R}$ ニ於テ解ケルタメニハ, A ヲ含

$\mathfrak{A}$ 内デ連結 (Zusammenhängend) + Abel
 群 ($\mathfrak{A}$ = 於ケル積ヲ結合トスル可換群デ單位ハ E ト一致
 スルモノ) $\mathcal{O}$ が存在スルコトが必要且ツ充分デアル。

(証明) 必要ナコトハ, e^{tX} (t 実変数) トスレバ, 之
 ハ連結ナ可換群デアリ, $t=1$ トスレバ A トナル, 従ツテ明
 ラカデアル。

次 = 充分ナ事ヲ証明スル。

先ツ $|A - E| < 1$ ナルトキハ Lemma = ヨツテ常ニ成
 立スル。

シカモ $X = \lg A$ ハ $\mathcal{O}$ カラ生ズル閉ゲタ環 $\mathcal{L}$ ($\mathcal{O}$,
 Element ノ和、積及ビソノ集積点ヲ要素トスル環) ノ要素
 デアル ($A \in \mathcal{O}$ ナルガ故ニ)。

所デ $\mathcal{O}$ カラ生ズル閉ゲタ環 $\mathcal{L}$ ノ内ニ $e^X = A$ ナル X が
 存在セヌト假定スルト矛盾ヲ生ズル。何トナレバ $\mathcal{O}$ ノ内デ
 e^X ($X \in \mathcal{L}$) ナルモノナ要素ノ全体ヲ $\mathcal{O}_1$, シカラザルモノ
 ノ全体ヲ $\mathcal{O}_2$ トスレバ, $\mathcal{O}$ が連結デカラ、 $\mathcal{O}$ 内ニハ $\mathcal{O}_1$ 及
 ビ $\mathcal{O}_2$ ノ両方ノ集積点デアル様ナ C が存在スル。今 $C \in \mathcal{O}_1$
 トシ、 $\lim A_n = C$, $A_n \in \mathcal{O}_2$ トスレバ $C^{-1}A_n$ ハ n が充分
 大ナルトキ $|C^{-1}A_n - E| < 1$ トナル。故ニ

$$C^{-1}A_n = e^{B_n} \quad (B_n \in \mathcal{L}).$$

従ツテ $A_n = e^D e^{B_n} = e^{D+B_n}$ ($e^D = C$, $D \in \mathcal{L}$
 トス)。

之レハ $A_n \in \mathcal{O}_2$ = 矛盾スル。

今度ハ $C \in \mathcal{O}_2$ トシ, $\lim A_n = C$, $A_n \in \mathcal{O}_1$ トス
 レバ n が充分大ナルトキ $|C^{-1}A_n - E| < 1$ ヲヨリ, $C^{-1}A_n = e^{B_n}$.

従ツテ $C = e^{-B_n} e^{-D_n} = e^{-B_n - D_n}$ ($B_n \in \mathcal{L}$, $A_n = e^{D_n}$,
 $D_n \in \mathcal{L}$). 之レハ $C \in \mathcal{O}_2$ ト矛盾スル。

結局 $\mathcal{O}$ ノスベテノ Element ハ e^X ($X \in \mathcal{L}$) ナル形ニ
 表ハサレノベナラヌ。(証明了)

[3] 前ノ定理ノ條件ハ抽象的デアルガ、次ニ之レヲ應用
 シテ特別ナ環ニ於テ $A = e^X$ ガ解ケル條件ヲ求メテ見ヨ。

定理 2. $\mathcal{R}$ ハ複素数ヲ *Operator* (係数) トシテ有
 スル環トシ, $E + \lambda A$ (λ 複素数) ハ高々可附番個ノ入
 ヲ除イテ [A 一定ノ時ニ] 常ニ逆 $(E + \lambda A)^{-1}$ ヲ有スルモ
 ノトスル。シカラバ $\mathcal{R}$ 内デ

$$A = e^X \quad (X \in \mathcal{R})$$

ナルタメニハ A ガ逆 A^{-1} ヲ有スルコトが必要且ツ充分
 デアル。

(註) $\mathcal{R}$ ガ有限次ノ Matrix ナルトキハ上ノ條件ハ明
 カニ成立スル。 $\text{Det}(E + \lambda A) = 0$ ハ有限個ノ根 λ ヲ有
 スルカラ。

又 $\mathcal{R}$ ガ函数 $f(x)$ ニ對スル *Fredholm* ノ運算 (線狀
 変換)

$Af = af(x) + \int K(x, y)f(y)dy$ ヲヨリナル場合 (a
 ハ常数) ニモ, *Fredholm* ノ積分方程式論ニヨリ上ノ條件
 ハ満足サレテキル。

上ノ定理2ヲ証明スルタメニ次ノ Lemma ヲ証明スル。

Lemma 2. $A \in \mathcal{A}$ = ヨツテ生ガル閉データ環 (A ト E カラ成ル多項式及ビソノ集積点カラ成ル環) ノ内デ逆ヲ有スルモノ (逆ハ $\mathcal{A}$ ニ属ス) ノ全体ヲ考ヘ、更ニソノ内デ E ト連結ト要素ノ全体ヲ $\mathcal{A}$ トスレバ、 $\mathcal{A}$ ハ連結ト $Abel$ 群 (可換群) デアル。

(Lemmaノ証明) $\mathcal{A}$ が連結ト集合ナルコトハ明カデア
アル、 $\mathcal{A}$ ノ内デ特ニ $|X - E| < 1$ ナル X ノ逆ハ
$$X^{-1} = E + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (X - E)^n$$

ニヨリ表ヘラレル。

カナル X^{-1} ハ X ト共ニ連続的ニ変化するカラ $\mathcal{A}$ = 属スル、之レカラ定理1ニ於ケルト類似ノ証明法 (帰謬法) = ヨリ X^{-1} ハスベテ $\mathcal{A}$ = 属スルコトが証明サレル。 $\mathcal{A}$ = 属スルニツノ要素ノ積ハ $\mathcal{A}$ = 属スルコトハ積ノ連続性 (E カラ出発シテ) = ヨリ容易ニナル。又 $\mathcal{A}$ ハスベテ A カラ生ジタモノ、故ニ交換可能デアアル。従ツテ $\mathcal{A}$ ハ $Abel$ 群ヲ作ル。

(定理2ノ証明) 定理ノ條件ハ必要ナルコトハ $A^{-1} = e^{-X}$ = ヨリ明ラカ。次ニ充分ナルコトハ Lemma 2 = 於ケル群 $\mathcal{A}$ ヲ考ヘレバ、 $\mathcal{A}$ ハ A ヲ含ム。 $[(1-\lambda)E + \lambda A]$ ヲ考ヘレバ A ハ逆ヲ有スルカラ、假定ニヨリ λ が可附番個ノ所ヲ避ケテ変化スレバ、 E ト A トハ $\mathcal{A}$ 内デ連結シテキルコトがワカル。従ツテ定理1ニヨリ本定理が証明サレタ。

(註) Lemma 2 の定理 2 の証明 = ハ必ずしも必要デ
 ハナイ。 Lemma 2 = ヨレバ $A = e^X$ ナル X が A カラ
 生ズル開チタ環内 = 存在スルコト が言ヘルノデアアル。

□ 4 尚ホ定理 1 ヲモット緩ナルコトが出来ナイデアラウ
 カ? 例ヘバ A が $\mathbb{R}$ 内デノ連続ナ群 (Abel 群デナクト
 モ) = 属スルコトカラ $A = e^X$ ト書ケナイデアラウカ?

又定理 1 = ヨリ 一般ノ連続ナ Abel 群ノ構造ヲ決定スル
 コトが出来ナイデアラウカ?

—— 以 上 ——