OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	Bieberbach ノ Drehungssatz ニ就テ
Author(s)	城, 憲三
Citation	全国紙上数学談話会. 1935, 72, p. 27-36
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74236
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

314. Bieberbach ノ Drehungssatz ニ就テ

城　憲三（阪大工）

§1. 等角寫像論ニ於ケル Bieberbach ノ Drehungssatz ニ就キ，以前ニ私ハ想像ヲ交ジヘテ愚論ヲ述ベタコトガアリ，一度ソノ申譯ヲスル責任ガアルト思フテヰタノデスガ，今度ハドウヤラ成功シタヤウデスカラ見テ頂キタイト思ヒマス。考ヘハ前ノト全然關係アリマセヌ。ツマリ新シク証

明法ヲ発見シタコトニナリマス。私ノ考ヘバカリデナク，ヤハリコノ Satz ノ熱心ナ研究家 M. Kössler ニ負フトコロ甚大デス、私ハ Kössler ノ缺点ヲ見ツケルコトガ出來，彼ノ理論ヲ修正シテ過ギマセヌ。以下ノ拙論ト Kössler ノ論文トヲ對照シテ下サレバ，スベテガ分明ニナルカト存ジマス。

(1) $f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots\cdots\cdots$

ヲ $|z|<1$ デ正則單葉函數トスル、コノ集合ヲ S トスル。我々ノ問題ハ集合 S 中デ $\arg f'(z)$ ノ grösste Max. ヲ求メルコトデ

$$\max_{|z|\leqq r,\ f\in S}|\arg f'(z)| \qquad (0\leqq r<1)$$

ハ如何ニ表ハサレルカト云フコトデアル。斯様ナ Grenge ノ函數ガ S 中ノ $f(z)$ デアリトスレバ（存在スル）$\arg_{f\in S} f'(z)$ ノ Kleinste Min. ノオコル函数 $f_1(z)$ ハ $f(z)$ カラ次ノ様ニスグ分カル。

何故ナラバ

$$f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots\cdots\cdots,$$

$$f_1(z)=z+\overline{a}_2z^2+\overline{a}_3z^3+\cdots\cdots\cdots,$$

トスレバ $f_1(z)$ ハ勿論 $|z|<1$ デ正則單葉デ

$$\arg f'(z)=\arg\overline{f_1'(\overline{z})}=-\arg f_1'(\overline{z}), \qquad |z|<1$$

デアルカラデアル。

(2) $\max_{|z|\leqq r,\ f\in S}|\arg f'(z)|\leqq\varphi(r)$

ナル Genaue Schranke $\varphi(r)$ ヲ今マデニ求メラレタ不完全ナ結果ハ次ノ通リデス。

1° $\varphi(r)=2\log\frac{1+r}{1-r}$, (Bieberbach)[1]

2° $\varphi(r)=\int_0^r \frac{2\sqrt{4-x^2}}{1-x^2}dx$, (Kössler)[2]

3° $\varphi(r)=2|a^2|r+\frac{3}{2}r\log\frac{1+r}{1-r}$ (Kössler)[3]

コンデハ次ノ定理ヲ証明スル。

定理 1. $f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots\cdots$ ヲ $|z|<1$ デ正則単葉函数トシタルトキハ

(3) $|\arg f(z)|_{|z|\leqq r}\leqq 2|a_2|r+\frac{3}{2}r\log\frac{1+r}{1-r}\eta$,

コンニ η ハ $0<\eta<1$ ナル a_2 ニ関係スル常数デアル。但シ a_2 ハ函数

$f(z)=z+a_2z^2+\cdots\cdots$, ノ z^2 ノ係数

§2. 証明第一段.

K. Löwner ニ従ヘバ, $\chi(\tau)$ ヲ $|\chi(\tau)|=1$ $(\tau\geqq 0)$ ナル stetige Funktion トシテ

(4) $a_2=-2\int_0^\infty \chi(\tau)e^{-\tau}d\tau$, $a_3=4\left(\int_0^\infty \chi(\tau)e^{-\tau}d\tau\right)^2-2\int_0^\infty \chi^2(\tau)e^{-2\tau}d\tau$

ト表ハスコトガ出来ル。従ッテ次ノ基本関係式ガ得ラレル。

---

1) Math. Zeitschr., 4(1919), 295—305.

2) Jahres bericht der D.M.V., 41(1931), 80—82.

3) Věstn. České Spol. Nauk, (1932).

(5) $a_2^2-a_3=2\int_0^\infty \kappa^2(\tau)e^{-2\tau}d\tau.$

変換： $F(\xi)=\dfrac{f\left(\frac{\xi+\alpha}{1+\bar\alpha\xi}\right)-f(\alpha)}{f'(\alpha)(1-|\alpha|^2)}=\xi+A_2\xi^2+A_3\xi^3+\cdots\cdots(|\alpha|<1)$

ヨレバ $F(\xi)$ ハ又 $|\xi|<1$ ニ於ケル正則単葉函数デ

$$A_2=\frac{f''(\alpha)(1-|\alpha|^2)}{2f'(\alpha)}-\bar\alpha,$$

$$A_3=\frac{1}{6}\left[\frac{f'''(\alpha)}{f'(\alpha)}(1-|\alpha|^2)^2-6\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}\bar\alpha(1-|\alpha|^2)+6\bar\alpha^2\right]$$

従ッテ

$$A_2^2-A_3=\frac{f''(\alpha)^2(1-|\alpha|^2)^2}{4f'(\alpha)^2}+\bar\alpha^2-\frac{\bar\alpha f''(\alpha)(1-|\alpha|^2)}{f'(\alpha)}$$

$$-\frac{1}{6}\frac{f'''(\alpha)}{f'(\alpha)}(1-|\alpha|^2)^2+\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}\bar\alpha(1-|\alpha|^2)-\bar\alpha^2$$

(6) $$=-\frac{f'''(\alpha)(1-|\alpha|^2)^2}{6f'(\alpha)}+\frac{f''(\alpha)^2(1-|\alpha|^2)^2}{4f'(\alpha)^2}$$

(6) ニ於テ，基本関係式 (5) ヲ適用スルト，α ノ代リニ z ($z=re^{i\varphi}$, $|z|\leqq r<1$) ト書キ

$$-\frac{f'''(z)(1-|z|^2)^2}{6f'(z)}+\frac{f''(z)^2(1-|z|^2)^2}{4f'(z)^2}=2\int_0^\infty \kappa^2(\tau)e^{-2\tau}d\tau$$

トオキ得ル $\kappa(\tau)$ ($|\kappa(\tau)|=1$, $\tau\geqq 0$) が存在スル。或ハ

(7) $$2z^2\frac{f'''(z)}{f'(z)}-3z^2\frac{f''(z)^2}{f'(z)^2}=\frac{-24z^2}{(1-|z|^2)^2}\int_0^\infty \kappa^2(\tau)e^{-2\tau}d\tau.$$

次ノ様ナ函数 $v(z)$ ヲ考ヘテ見ル。

(8) $$v(z)=1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}\equiv R(v)+iI(v).$$

$f'(z)\neq 0$ デアルカラ $v(z)$ ハ $|z|<1$ デ正則デアル、コヽニ，

$$\mathcal{R}(v)=1+\mathcal{R}\left(z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right),\quad \mathrm{I}(v)=\mathrm{I}\left(z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right).$$

而シテ

$$z\frac{f''(z)}{f'(z)}=z\frac{d}{dz}\log f'(z)=-i\frac{\partial}{\partial\varphi}\log f'(z),$$

$$\log f'(z)=\log|f'(z)|+i\arg f'(z).$$

從ッテ，

(9) $$\mathcal{R}(v)=1+\frac{\partial}{\partial\varphi}\arg f'(z);\quad \mathrm{I}(v)=-\frac{\partial}{\partial\varphi}\log|f'(z)|.$$

次ニ (8) ニヨッテ

$$2zv'(z)-v^2(z)+1=2z\left(\frac{f''}{f'}+z\,\frac{f'''f'-f''^2}{f'^2}\right)-\left(1+z\frac{f''}{f'}\right)^2+1$$

$$=2z\frac{f''}{f'}+2z^2\frac{f'''}{f'}-2z^2\frac{f''^2}{f'^2}-1-2z\frac{f''}{f'}-z^2\frac{f''^2}{f'^2}+1$$

$$=2z^2\frac{f'''}{f'}-3z^2\frac{f''^2}{f'^2}.$$

コノ結果ハ (7) ノ左辺ト一致スルカラ

(10) $$2zv'(z)-v^2(z)+1=\frac{-24z^2}{(1-|z|^2)^2}\int_0^\infty \chi^2(\tau)e^{-2\tau}d\tau,$$

$zv'(z)=-i\frac{\partial}{\partial\varphi}v(z)$ デアルカラ (8) ニヨッテ

$$2zv'(z)-v^2(z)+1=-2i\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\mathcal{R}(v)+i\mathrm{I}(v)\right)$$

$$-\left(\mathcal{R}(v)+i\mathrm{I}(v)\right)^2+1$$

$$=-2i\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial\varphi}+2\frac{\partial\mathrm{I}}{\partial\varphi}-\mathcal{R}^2-2i\mathcal{R}\mathrm{I}+\mathrm{I}^2+1$$

トナルカラ (10) ノ式ハ次ノ様ニナル。

$$2\frac{\partial\mathrm{I}}{\partial\varphi}-2i\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial\varphi}-\mathcal{R}^2-2i\mathcal{R}\mathrm{I}+\mathrm{I}^2+1=\frac{-24z^2}{(1-|z|^2)^2}\int_0^\infty \chi^2(\tau)e^{-2\tau}d\tau.$$

上式ノ実数部分，虚数部分ヲ等置シテ

$$(11)\quad 2\frac{\partial I}{\partial\varphi}+I^2+1-R^2=\mathcal{R}\left[\frac{-24r^2e^{i2\varphi}}{(1-r^2)^2}\cdot\int_0^\infty\chi^2(\tau)e^{-2\tau}d\tau\right],$$

$$(12)\quad \frac{\partial R}{\partial\varphi}+RI=\mathcal{I}\left[\frac{12r^2e^{i2\varphi}}{(1-r^2)^2}\cdot\int_0^\infty\chi^2(\tau)e^{-2\tau}d\tau\right].$$

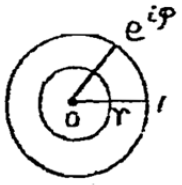
我々ハ(12)ノ應用ヲ考ヘテ行クノデアルガ，途中再々Cauchy-Riemann ノ関係式

$$(13)\quad r\frac{\partial R}{\partial r}=\frac{\partial I}{\partial\varphi},\quad \frac{\partial R}{\partial\varphi}=-r\frac{\partial I}{\partial r}$$

ヲ用フ。

§3. 証明第二段

$|\zeta|=r\ (0\leqq r<1)$ トルrヲ任意ニキメテζハ$|\zeta|=r$上ニアルトスル。$\arg f'(\zeta)$ $\underset{|\zeta|=r}{}$ ガMax ニナル様ナ



φ ニ對シテハ

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\arg f'(\zeta)=0$$

デアルカラ，カヽルφヲ fix シ $\underset{S}{\mathrm{Max}}\arg ff'(\zeta)=\arg f'(re^{i\varphi})$ トシヨウ。S ニ属スル任意ノ函数 ff モ止ノφニ對シ

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\arg ff'(\zeta)=0$$

トシテオク．（可能）コノトキハ(9)ヨリ $k(v)=1$．從ッテ(12)ヨリ

$$\frac{\partial R}{\partial\varphi}+I=\mathcal{I}\left[\frac{12r^2}{(1-r^2)^2}\int_0^\infty\chi^2(\tau)e^{i2\varphi}e^{-2\tau}d\tau\right],\ \varphi\text{ハ一定}$$

関係式(13)ヲ用ヒテ上式ハ

$$-r\frac{\partial I}{\partial r}+I=\mathcal{J}\left[\frac{12r^2}{(1-r^2)^2}\int_0^\infty \mathcal{K}^2(\tau)e^{i2\varphi}e^{-2\tau}d\tau\right]$$

トナリ或ハ

$$(14)\quad r\frac{\partial I}{\partial r}-I=\mathcal{J}\left[\frac{-12r^2}{(1-r^2)^2}\int_0^\infty \mathcal{K}^2(\tau)e^{i2\varphi}e^{-2\tau}d\tau\right].$$

サテ，又 (13) ニヨリ

$$2\frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{\arg f'(z)}{r}=2\frac{\partial}{\partial r}\log|f'(z)|=2(a_2e^{i\varphi}+\bar{a}_2e^{-i\varphi})+(r),$$

コヽニ (r) ハ Ordnung r，Glieder ヲ表ハス．特ニ $r=0$ ノトキノ φ ノ値ヲ求メルト，

$$(15)\quad \varphi_1=\frac{\pi}{2}-\arg a_2,\quad \varphi_2=\frac{3\pi}{2}-\arg a_2.$$

且ツ又

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\log|f'(z)|=i(a_2e^{i\varphi}-\bar{a}_2e^{-i\varphi})+(r)$$

デアッテ $\frac{I(v)}{r}$ ハ $r=0$ ノトキハ (a) ノ式：$I(v)=-\frac{\partial}{\partial\varphi}\log|f'(z)|$ ニヨッテ $2|a_2|$ 又ハ $-2|a_2|$．$\frac{I(v)}{r}=K(r,\varphi)$ トオケバ

$$I(v)=r\cdot K(r,\varphi)$$

デ

$$r\frac{\partial I}{\partial r}-I=r\left(K(r,\varphi)+r\frac{\partial K}{\partial r}\right)-I=r^2\frac{\partial K}{\partial r}.$$

即チ (14) ヨリ

$$(16)\quad \frac{\partial K}{\partial r}=\mathcal{J}\left[\frac{-12}{(1-r^2)^2}\int_0^\infty \mathcal{K}^2(\tau)e^{i2\varphi}e^{-2\tau}d\tau\right]$$

(16) ニ於イテ

$$\chi(\tau)=e^{i\vartheta(\tau)}=\cos\vartheta(\tau)+i\sin\vartheta(\tau),$$

$$\left|\vartheta\int_0^\infty-\chi^2(\tau)e^{i2\varphi}e^{-2\tau}d\tau\right|=\left|\int_0^\infty\sin 2(\varphi+\vartheta(\tau))e^{-2\tau}d\tau\right|,$$

而シテ φ ノ値トシテ (15) =ヨリ得ル

$$2\varphi_1=\pi-2\arg a_2,\quad 2\varphi_2=3\pi-2\arg a_2$$

ヲ代入シテ

$$=\left|\int_0^\infty\sin 2(\arg a_2-\vartheta(\tau))e^{-2\tau}d\tau\right|$$

$$\equiv\frac{1}{2}\eta$$

トオケバ $0\leqq\eta<1$. $a_2=-2\int_0^\infty\chi(\tau)e^{-\tau}d\tau$ =シテモシテ$\geqq 0$ =對シテ $\sin 2(\arg a_2-\vartheta(\tau))=1$ デアルト云フ特種ナル $\vartheta(\tau)$ =對シテハ Kössler ノ結果ト一致スルケレドモ，コノトキハ實ハ (12) ノ式ノ成立スル場合=ハ起ラナイノデアル。コレ=Kössler ノ缺陷ガアル。

故=

$$\frac{\partial K}{\partial r}\leqq\frac{6}{(1-r^2)^2}\cdot\eta\quad(f=f+ルトキ=等号成立ス)$$

積トシテ $K(0,\varphi)\leqq 2|a_2|$ ナルコトヨリ

(17) $$K(r,\varphi)\leqq 2|a_2|+\left(\frac{3r}{1-r^2}+\frac{3}{2}\log\frac{1+r}{1-r}\right)\eta.$$

而シテ $K(r,\varphi)=-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\log|f'|=\frac{\partial}{\partial r}\arg f'(z)$ デアルカラ，再ビ (17) ヲ積分シテ

(18) $$\arg f'(z)\leqq 2|a_2|r+\frac{3}{2}r\log\frac{1+r}{1-r}\cdot\eta.\quad(\arg f'(0)=1)$$

$$\frac{1}{2}\eta=\left|\int_0^\infty \sin 2(\arg a_2-\vartheta(\tau)e^{-2\tau}d\tau\right| \quad =\text{於テ}$$

$$a_2=-2\int_0^\infty \chi(\tau)e^{-\tau}d\tau=-2\int_0^\infty \cos\vartheta(\tau)e^{-\tau}d\tau-i2\int_0^\infty \sin\vartheta(\tau)e^{-\tau}d\tau$$

ヲ用フレバ

$$\arg a_2=\arctan\frac{\int_0^\infty \sin\vartheta(\tau)e^{-\tau}d\tau}{\int_0^\infty \cos\vartheta(\tau)e^{-\tau}d\tau}$$

デアルカラ

$$(19)\quad \eta=\left|2\int_0^\infty \sin 2\left\{\arctan\frac{\int_0^\infty \sin\vartheta(\tau)e^{-\tau}d\tau}{\int_0^\infty \cos\vartheta(\tau)e^{-\tau}d\tau}-\vartheta(\tau)\right\}e^{-2\tau}d\tau\right|$$

而シテ定理1ハ次ノ様ニ書ケル。

定理2. $$\left|\arg f'(z)\right|_{|z|\leqq r}\leqq 4\left|\int_0^\infty e^{i\vartheta(\tau)}e^{-\tau}d\tau\right|r+\frac{3}{2}r\log\frac{1+r}{1-r}\cdot\eta.$$

ηハ(19)デ與ヘラル。

或ハ又Valiron-Landau[1]ノ定理ヲ用ヒテ定理ノ結果ヲ絶對常數ノミヲ用ヒテ（fニ依存スルa_2,ηヲ除ク）表現スルコトモ可能デアル。

何レニシテモ最後ノAusdruckハナルベク簡單ニスル

---

1) $\left|\int_0^\infty \chi^2(\tau)e^{-2\tau}d\tau\right|\leqq M\ (0\leqq M\leqq\frac{1}{2})$ナルトキハ$\left|\int_0^\infty \chi(\tau)e^{-\tau}d\tau\right|\leqq\nu\left(\frac{1}{4}+\frac{M}{2}\right)$,

但シνヲ$\left(\nu+\frac{1}{2}\right)e^{-2\nu}=\frac{1}{4}+\frac{M}{2}$ナル方程式ノ根トスレバ

$$\nu\left(\frac{1}{4}+\frac{M}{2}\right)=(\nu+1)e^{-\nu}$$

トシテ，Kössler ノ結果ハソノ Ausdruck ニ於テ最良ノモノデアルラシイ。