315. 函數空間ニ於ケル距離附ケ不能ナ一例

南 雲 道 夫 (阪大)

$\boxed{1}$ 抽象空間論ニツイテ門外漢デアル私ハ次ノコトヲ本紙ニ載セテ，識者ノ御教示ヲ仰ギタク思ヒマス。(問題ノ内容カラ見テ既ニ有名ナ事實デアル様ニ想像サレマス)

函数集合ニ距離ヲバ適當ニ定義スルコトニヨリ，一様收斂ヤ平均收斂等便利ナ方法ガ函数体系ノ理論ニ用ヒラレテキル。

之等ハ距離ガ定義サレテキルカラ，抽象空間論ニ於ケル距離空間デアル。

所ガ抽象空間論ニ於テハ (極限ノ概念ヲバ主眼トスルカラ) 連続寫像 (位相幾何学的変換) ニ於イテ不変性ヲ持タヌ距離ヲバ抽象シ去リ只一聯ノ公理体系ニヨリ抽象的ニ近傍ナル概念ヲ導入スル。*Hausdorf* ノ近傍系ハ之デアル。(今日ノ抽象空間論ハモット極端ニ抽象化サレテキル)

然シ解析論ニ於ケル距離ガ持ツ意味ハ重大デ，抽象空間論ニ於ケル如ク，之レヲ直チニ抽象シ去ルコトハ一般ニハ許サレナイ。(*Hilbert* 空間論ニ於ケル *inner product*

ノ重要性ノ如シ）之レヲ抽象シ去ル必要サヘ生ジナケレバ，距離ヲ保留シ活用スルコトガ有意義デアル。所ガ解析論ニ於テ距離付ケノ不可能ナ場合ガ存在スル！

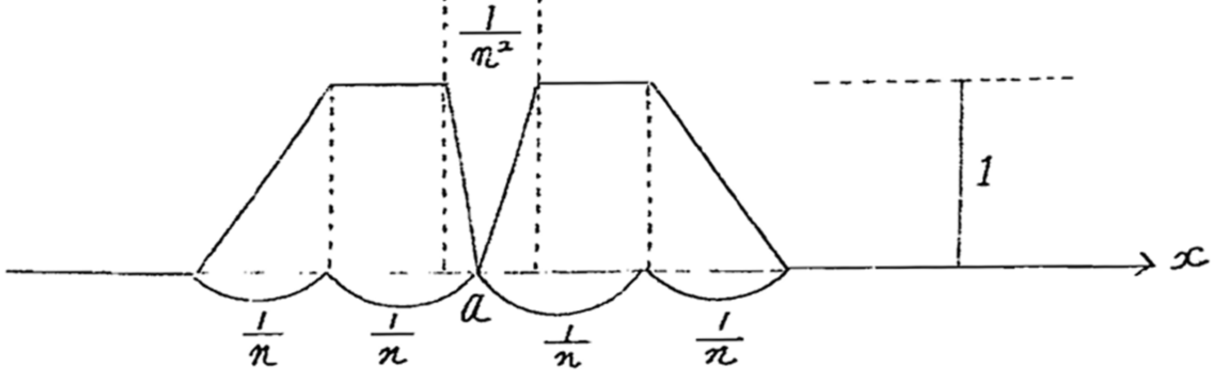
此ノ場合トハ（一般ノ解析論ニ於テハ）特別ニ病理的ナ場合デハナク，ムシロ普通ノ場合ナノデアル。次ニ之レヲ示サウ。

$\boxed{2}$　實数閉區間 $\alpha \leqq x \leqq \beta$ ニ於テ定義サレタ実数値ヲ取ル連続函数 $y=f(x)$ ノ集合ヲ $\mathfrak{F}$ トスル。$\mathfrak{F}$ 内ニ於ケル一般ノ收斂，$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=F(x)\in\mathfrak{F}$，ヲ特徴付ケルヤウナ $\mathfrak{F}$ ノ距離付ケハ不可能デアル！［$\mathfrak{F}$ ハ一様有界デモヨイ。］

（註）　上ニ言フ一般ノ收斂トハ，$\alpha \leqq x \leqq \beta$ ニ於ケル各 x ニツキ $f_n(x)$ ガ $F(x)$ ニ收斂スルコトデアル。（從ツテ一様收斂デハナイ。）

（証明）　距離付ケ不能ナ一例ヲ示セバヨイ。

$y=f_n(x,a)$ ヲバ図ノ如キ函数トスル。



然ラバ $\lim_{n\to\infty} f_n(x,a)=0$.　故ニ $y=f_n(x,a)$ ト $y=0$ トノ距離ヲ $\rho(n,a)$ トスレバ，$\lim_{n\to\infty}\rho(n,a)=0$.

今任意ノ自然数 m ニ對シテ，各 a ニツキ $\rho(n,a)<\frac{1}{m}$ 且ツ $n>2^m$ ナルヤウニ $n(a,m)$ ヲ定メル。各点 $x=a$ ヲ中心トスル幅 $\frac{2}{n(a,m)}$ ナル開區間ヲ I_a^m デ示ス。Borel ノ被覆定理ニヨリ，(m ヲ一定トスル時) 閉デタ區間 $[\alpha,\beta]$ ハ有限個ノ I_a^m デ覆ハレル。

從ッテ $f_n(x,a)$ 及ビ $n(a,m)$ ノ定義ニヨリ，$[\alpha,\beta]$ カラ長サノ総和ガ $\frac{\beta-\alpha}{2^m}$ 以下ナル有限個ノ開區間ヲ除イタ残リノ閉集合 $\mathfrak{M}_m$ ニ於テ，ソノ任意ノ一点ニ對シテハ必ズ $f_n(x,a)=1$ ナルヤウナ函数ガ存在スル。從テ閉集合 $\mathfrak{M}_m$ ($m=1,2,3,4,$ ---------) ノ Durchschnitt ハ空デナイ閉集合デアル。

從ッテソノ一点ヲ $x=\xi$ トスレバ $x=\xi$ ニ於テ

$$f_{n(a,m)}(\xi,a)=1 \qquad (a\text{ ハ }\xi\text{ ニ從属スル})$$

ナルヤウナ函数ガ存在スル（各 m ニツキ）。所ガ<u>カヽル函数ニツイテハ</u> $\rho(n,a)<\frac{1}{m}$. 從ッテ $\lim_{m\to\infty}\rho(n,a)=0.$

故ニ $\lim_{m\to\infty} f_{n(a,m)}(x,a)=0$ デナケレバナラヌ（若シモ一般ノ收斂ノ特徴付ケガ可能ナラバ）之ハ $x=\xi$ ニ於イテ

$$f_{n(a,m)}(\xi,a)=1$$

ナルコトト相容レナイ。即チ一般ノ收斂ヲ特徴付ケルヤウナ距離付ケハ不可能デアル。

$\boxed{3}$ 以上ノ証明デハ距離ニ関スル三角不等式サヘモ全然用ヒラレテヰナイ。從ッテ距離空間ニ於テ距離ニ関スル三

角不等式ヲ捨テヽモ一般ノ收斂ヲ距離化スルコトハ不可能デアル。

以上ノ問題ハ抽象空間論ニ於ケル距離化ノ理論（必充條件）カラ見レバ，平凡ナ一例題ニスギナイデアラウ。茲ニ今更ナガラ私ノ平素ノ不勉强ヲ告白セザルヲ得ナイ。

上ノ如クニ，一般ノ收斂ヲ特徴付ケルヤウナ距離ノ定義ガ不可能ナコトガ分ッテ見レバ，近年 Tychonoff ガ一般ノ收斂ヲ特徴付ケルヤウナ（Hausdorf ノ意味ノ）近傍ヲ定義シタコトノ意義ガ解ル樣ナ氣ガスル。

（Math. Ann 102.）尚 Tychonoff ノ近傍ノ定義ニヨレバ一樣ニ有界ナ函数集合ガ緊ッテヰル（compact ノ訳ノツモリ、少シ調子ガ悪イ訳ダガ，意味ハ之ガヨクアテハマルト思フ）事ニナル。之ハ実ニ注目スベキコトデアル!! 然シ此ノ近傍ノ意味ニ於ケル汎函数ノ連續性ハ本質的ニハ Vollstetigkeit デアル樣ニ思ハレルノデ，應用上ノ範囲ガ果シテドノ位廣イモノデアルカハ私ニハ未ダ疑問デアル。

—— 以上 ——