



Title	函数ノ多葉性ニ就テ
Author(s)	南, 右内
Citation	全国紙上数学談話会. 1936, 73, p. 18-24
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74243
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

320. 函数ノ多葉性ニ就テ

南 右 内 (札幌一中)

任意ノ凸領域 A ニ於テ次ノ函数ヲ考ヘル。

$$f(z) = \frac{a}{z} + g(z); \quad \text{但シ } g(z) \text{ハ } A \text{デ正則,}$$

a ハ任意常数。

コノ函数ノ單葉性ニ就テハ前ニ述べタガ今回ハソノ多葉性ニ就テ研究スル。

定理. $f(z) = \frac{a}{z} + g(z)$ ヲ凸領域 A ニ於テ定義セラレ

タ函数トシ、 $g(z)$ ハ A ニ於テ正則トス。コノトキ

1° $w = g^{(p)}(z)$ ($z \in A$)ハ w -planeノ凸領域 Ω ノ内部ニアル。

2° z -planeニ於ケル扇形 B ガ $w = \frac{(-1)^{p+1} p! a}{z^p} = \infty$

ツテ w -planeノ扇形 B ニ寫像サレテ $B \cdot \Omega = 0$ デアル。

ガ成立スレバ $f(z)$ ハ $A \cdot B$ ニ於テ高々 p 葉デアル。

定理ノ証明ヲスル前ニ次ノ補助定理ヲ述ベル。

補助定理 I. 任意ノ凸領域 A ニ於テ正則ナ函数 $g(z)$ ヲ考ヘル。

A ニ属スル点 $z_1, z_2, \dots, z_p, z_{p+1}, \dots$ ヲ取り

順次ニ

$$\Delta_0(z_1) = g(z_1)$$

$$\Delta_1(z_2, z_1) = \frac{g(z_2) - g(z_1)}{z_2 - z_1}$$

$$\Delta_p(z_{p+1}, z_p, \dots, z_1) = \frac{\Delta_{p-1}(z_{p+1}, z_{p-1}, \dots, z_1) - \Delta_{p-1}(z_p, z_{p-1}, \dots, z_1)}{z_{p+1} - z_p}$$

ヲ作レバ

$$\begin{aligned} \Delta_p(z_{p+1}, z_p, \dots, z_1) &= \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 g^{(p)}[z_1 + (z_2 - z_1)t + \dots + (z_{p+1} - z_p)tt_1 \dots t_{p-1}] \\ &\quad t^{p-1}, t_1^{p-2}, \dots, t_{p-1} dt dt_1 \dots dt_{p-1} \end{aligned}$$

が成立ツ。(本誌30号、木村氏論文参照)

補助定理II. 函数 $g(z)$ ハ任意ノ凸領域 A ニ於テ定義セラレタ正則函数ニシテ $z \in A$ ノトキ $g(z) \in \mathcal{O}$ トス。($\mathcal{O}$ ハ凸領域)

然レトキハ A ニ属スルーツノ正則曲線 C ; $z = z(t)$

$$(0 \leq t \leq 1)$$

ヲトレバ

$$p \int_0^1 g[z(t)] t^{p-1} dt \in \mathcal{O} \quad p=0, 1, 2, \dots$$

証明. $0 \leq t \leq 1$ ノ時 $z(t) \in A$ ニシテ $z \in A$ ノトキ $g(z) \in \mathcal{O}$ ナル故、 $g[z(t)] \in \mathcal{O}$. $0 \leq t \leq 1$ ナルトキ $t^{p-1} > 0$ ナルカラ

Weierstrassesche Mittelwertsatz = $\exists$ η

$$\frac{\int_0^1 \varphi[\xi(t)] t^{p-1} dt}{\int_0^1 t^{p-1} dt} \in \mathcal{O}$$

$$\therefore p \int_0^1 \varphi[\xi(t)] t^{p-1} dt \in \mathcal{O}$$

補助定理 III. $\xi \in A$, $\vdash g^{(p)}(\xi) \in \mathcal{O}$ $\vdash \xi_1, \xi_2, \dots$
 $\dots, \xi_{p+1} \in A$ $\vdash$ $\forall$

$$p! \Delta_p(\xi_{p+1}, \xi_p, \dots, \xi_1) \in \mathcal{O}$$

証明. 補助定理 II = 於 τ $\varphi(\xi) = g^{(p)}(\xi)$ $\vdash$ $\forall$ ξ

$$\xi = \xi(t, t_1, \dots, t_{p-1}) = \xi_1 + (\xi_2 - \xi_1)t + \dots$$

$$\dots + (\xi_{p+1} - \xi_p)t t_1 \dots t_{p-1}$$

$$[0 \leq t \leq 1, 0 \leq t_1 \leq 1, \dots, 0 \leq t_{p-1} \leq 1]$$

$\vdash$ $\forall$ $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{p+1} \in A$ $\vdash$ $\forall$ 故 $\xi(t, t_1, \dots, t_{p-1}) \in A$
 $\vdash$ $\forall$.

従って

$$g^{(p)}[\xi(t, t_1, \dots, t_{p-1})] \in \mathcal{O}$$

故 = 補助定理 II $\exists$ η

$$p \int_0^1 g^{(p)}[\xi(t, t_1, \dots, t_{p-1})] t^{p-1} dt \in \mathcal{O}$$

次 = 補助定理 II = 於 τ

$$\varphi(\xi) = p \int_0^1 g^{(p)}[\xi(t, t_1, \dots, t_{p-1})] t^{p-1} dt$$

$\vdash$ $\forall$ ξ

$$(P-1) \int_0^1 \left\{ P \int_0^1 g^{(P)}[z(t, t_1, \dots, t_{P-1})] t^{P-1} dt \right\} t_1^{P-2} dt_1 \in \mathcal{O}$$

$$\text{即ち } P(P-1) \int_0^1 \int_0^1 g^{(P)}[z(t, t_1, \dots, t_{P-1})] t^{P-1} t_1^{P-2} dt dt_1 \in \mathcal{O}$$

以下同様ニコノ方法ヲ繰返セバ

$$P! \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 g^{(P)}[z(t, t_1, \dots, t_{P-1})] t^{P-1} t_1^{P-2} \dots t_{P-1}^{P-2} dt dt_1 \dots dt_{P-1} \in \mathcal{O}$$

$$\text{即ち } P! \Delta_P(z_{P+1}, z_P, \dots, z_1) \in \mathcal{O}$$

定理ノ証明

A・Bニ属スル任意ノ $P+1$ 個ノ点 $z_1, z_2, \dots, z_{P+1}$ ヲ
取リ

$$\bar{\Delta}_0(z_1) = f(z_1)$$

$$\bar{\Delta}_1(z_2, z_1) = \frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1}$$

$$\bar{\Delta}_P(z_{P+1}, z_P, \dots, z_1)$$

$$= \frac{\bar{\Delta}_{P-1}(z_{P+1}, z_{P-1}, \dots, z_1) - \bar{\Delta}_{P-1}(z_P, z_{P-1}, \dots, z_1)}{z_{P+1} - z_P}$$

ヲ作レバ順次

$$\bar{\Delta}_0(z_1) = \frac{a}{z_1} + g(z_1) = \frac{a}{z_1} + \Delta_0(z_1)$$

$$\bar{\Delta}_1(z_2, z_1) = \frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1} = \frac{1}{z_2 - z_1} \left[\left(\frac{a}{z_2} + g(z_2) \right) - \left(\frac{a}{z_1} + g(z_1) \right) \right]$$

$$-\left(\frac{a}{z_1} + g(z_1)\right) = \frac{-a}{z_1 z_2} + \Delta_1(z_2, z_1)$$

トナリ一般 =

$$\bar{\Delta}_p(z_{p+1}, z_p, \dots, z_1) = \frac{(-1)^p a}{z_1 z_2 \dots z_{p+1}} + \Delta_p(z_{p+1}, z_p, \dots, z_1)$$

$$\therefore p! \bar{\Delta}_p(z_{p+1}, z_p, \dots, z_1)$$

$$= - \left[\frac{(-1)^{p+1} a p!}{z_1 z_2 \dots z_{p+1}} - p! \Delta_p(z_{p+1}, z_p, \dots, z_1) \right]$$

$$\text{然ルニ假定ヨリ } \frac{(-1)^{p+1} a p!}{z_1 z_2 \dots z_{p+1}} \in \mathcal{B}$$

$$\text{補助定理IIIヨリ } p! \Delta_p(z_{p+1}, z_p, \dots, z_1) \in \mathcal{O}$$

$$\mathcal{O}, \mathcal{B} = 0 \text{ デアルカラ}$$

$$\frac{(-1)^{p+1} a p!}{z_1 z_2 \dots z_{p+1}} \neq p! \Delta_p(z_{p+1}, z_p, \dots, z_1)$$

$$\text{故ニ } \bar{\Delta}_p(z_{p+1}, z_p, \dots, z_1) \neq 0$$

$$\text{即チ } f(z) = \frac{a}{z} + g(z) \wedge A \cdot B = \text{於テ高々 } p \text{ 葉デアル。}$$

$$\text{系 1. } f(z) = \frac{1}{z} + g(z) \text{ ヲ凸領域 } A = \text{於テ定義セラレタ}$$

函数トシ、 $g(z) \wedge A$ デ正則トス。コノトキ

$$B \text{ ヲ } |z| < \rho \text{ トスレバ } \mathcal{B}; |w| > \frac{p!}{\rho^{p+1}}$$

$$\text{故ニ } \mathcal{O} \wedge |w| < \frac{p!}{\rho^{p+1}} \text{ ナラバ良イコトニナル、從ツテ次}$$

ノ定理ヲ得ル。

任意ノ凸領域 A = 於テ $g(z)$ が正則ナルトキ

$$f(z) = \frac{1}{z} + g(z) \text{ヲ考ヘル。}$$

モシモ A = 於テ $|g^{(p)}(z)| < \frac{p!}{\rho^{p+1}}$ ナラバ $f(z)$ ハ $A \cdot B$

即チ $|z| < \rho$ ト A トノ共通部ハデ高々 p 葉デアル。”

コレヨリ直チニ次ノ定理が得ラレル。

“ $f(z) = \frac{1}{z} + g(z)$ が $0 < |z| < r$ デ正則デ且ツココデ

$$\left| \frac{z^{p+1} f^{(p)}(z)}{(-1)^p p!} - 1 \right| < 1$$

ナラバ $0 < |z| < r$ デ高々 p 葉デアル。”

之レ即チ木村氏が本誌30号デ得ラレタモノデアル。

系2. 同様假定ノ元ニ

$$B; |z| > \rho \text{ トスレバ } B; |w| < \frac{\rho!}{\rho^{p+1}} \text{ トナル。}$$

$$\text{故ニ } \alpha \text{ ハ } \operatorname{Re} e^{i\alpha} g^{(p)}(z) > \frac{\rho!}{\rho^{p+1}} \text{ (}\alpha \text{ ハ任意ノ実数)}$$

ナラバ良イコトニナル。

即チ次ノ定理トナル。

“ $f(z) = \frac{1}{z} + g(z)$ ヲ凸領域 A デ定義セラレタ函数,

$g(z)$ ハ A デ正則トス。若シ A デ

$$\operatorname{Re} e^{i\alpha} g^{(p)}(z) > \frac{\rho!}{\rho^{p+1}}$$

ナラバ $|z| > \rho$ ト A トノ共通部ハデ高々 p 葉ナリ。”

系3. 本定理ニ於テ $\alpha = 0$ トスレバ $f(z)$ ハ A = 於テ正則ナ

函数トナル。コノトキ B トシテ全平面ヲトレバ B ハ

w -plane ノ原点トナル、即チ 0 ハ原点ヲ含マナイ
凸領域ナラバ良イコト＝ナル。

“ $f(z)$ ヲ凸領域 A ＝於テ正則トスルトキ A ＝於テ
 $\operatorname{Re} i\alpha f^{(p)}(z) > 0$ (α ; 實常數) ナラバ $f(z)$ ハ A ＝於
テ高々 P 葉ナリ。”

著キ落シマシタガ系 I ハ又次ノ形ニモ述べラレマス。

“ 任意ノ凸領域 A ＝於テ $g(z)$ ヲ正則トシテ $f(z) = \frac{1}{z} + g(z)$

ヲ考ヘル $\max_{z \in A} |g(z)| = M$ トスレバ $|z| < \sqrt[p+1]{\frac{P!}{M}}$ ト A ト

ノ共通部分ヲ高々 P 葉ナリ。”

以上 — 1935. 12. 21. —