OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	單葉函數ニ就イテ
Author(s)	城, 憲三
Citation	全国紙上数学談話会. 1936, 74, p. 1-5
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74244
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

321. 單葉函數ニ就イテ

城　憲三（阪大工）

[1] $f(z)=z+a_2z^2+\cdots\cdots$ ヲ $|z|<1$ ニ於ケル正則單葉函數トシ，

Nevanlinna 変換：

$$(1)\quad h(\zeta)=\frac{-f\left(\frac{-\zeta+z_1}{1-\bar{z}_1\zeta}\right)+f(z_1)}{f'(z_1)(1-|z_1|^2)}=\zeta+\cdots\cdots$$

ヲ考ヘルト，$h(\zeta)$ ハ $|\zeta|<1$ デ正則單葉デアル．$z_2=\frac{-\zeta+z_1}{1-\bar{z}_1\zeta}$

トオケバ $|z_2|<1$ デアッテ

$$(2)\quad \zeta=\frac{z_1-z_2}{1-\bar{z}_1z_2}$$

トナル。(1), (2) ヨリ

$$(3)\quad \frac{h(\zeta)}{\zeta}=\frac{f(z_1)-f(z_2)}{f'(z_1)(1-|z_1|^2)}\cdot\frac{1-\bar{z}_1z_2}{z_1-z_2}$$

而シテ Grunsky ノ第一定理（Dissertation 参照）ヨリ

$$(4)\quad \left|\log\frac{h(\zeta)}{\zeta}+\log(1-|\zeta|^2)\right|\leqq\log\frac{1+|\zeta|}{1-|\zeta|}$$

デアルカラ，(4) = (3) ヲ代入シテ次ノ主要定理が得ラレル。

$$(5)\quad \left|\log\frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2}\cdot\frac{1-\bar{z}_1z_2}{f'(z_1)(1-|z_1|^2)}+\log\left(1-\left|\frac{z_1-z_2}{1-\bar{z}_1z_2}\right|^2\right)\right|$$

$$\leqq \log \frac{1+\left|\frac{z_1-z_2}{1-\bar{z}_1 z_2}\right|}{1-\left|\frac{z_1-z_2}{1-\bar{z}_1 z_2}\right|}.$$ *)

(5)ハ從來單葉函數論ニ知ラレテヰル非常ニ多クノ定理ヲ含ンデヰル・面白イカラ導キ出シテ見ヨウ。

Ⅰ. $z_1=0,\ z_2=z_0$ トオケバ

定理1. $$\left|\log \frac{f(z_0)}{z_0}+\log(1-|z_0|^2)\right| \leqq \log \frac{1+|z_0|}{1-|z_0|}.$$

Ⅱ $z_2=0,\ z_1=z_0$ トオケバ

$$\left|\log \frac{f(z_0)}{z_0}\cdot\frac{1}{f'(z_0)(1-|z_0|^2)}+\log(1-|z_0|^2)\right| \leqq \log \frac{1+|z_0|}{1-|z_0|},$$

或ハ

定理2. $$\left|\log \frac{z_0 f'(z_0)}{f(z_0)}\right| \leqq \log \frac{1+|z_0|}{1-|z_0|},$$ (Grunsky ノ等ニ定理)

系 $$\frac{1-|z_0|}{1+|z_0|} \leqq \left|\frac{z_0 f'(z_0)}{f(z_0)}\right| \leqq \frac{1+|z_0|}{1-|z_0|},$$ (Nevanlinna ノ定理)

Ⅲ. (5)ノ左辺ノ絶對値記号内ノ實數部分ノミヲ考ヘルト,

定理3. $$\left(\frac{1-|z_1|}{1+|z_1|}\right)^2\cdot\frac{|1-\bar{z}_1 z_2|}{(|1-\bar{z}_1 z_2|+|z_1-z_2|)^2} \leqq \left|\frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2}\right|$$

---

*) $\log \frac{1+\left|\frac{z_1-z_2}{1-\bar{z}_1 z_2}\right|}{1-\left|\frac{z_1-z_2}{1-\bar{z}_1 z_2}\right|} \equiv D(z_1,z_2)$ ハ z_1, z_2 ニ点間ノ non-Euclidean distance ヲ表ハスカラ,モ少シ幾何學的ナ意見ヅケヲシタイ様ナ氣ガスル。(G. Julia, Principes géometriques d'analyse Ⅰ, p. 39 參照)

$$\leqq \left(\frac{1+|z_1|}{1-|z_1|}\right)^2 \cdot \frac{|1-\bar{z}_1 z_2|}{(|1-\bar{z}_1 z_2|-|z_1-z_2|)^2} \quad (\text{Szegö ノ定理})$$

上ノ定理ニ於テ $z_1=0$, $z_2=z_0$ トオケバ

系1. $\dfrac{1}{(1+|z_0|)^2} \leqq \left|\dfrac{f(z_0)}{z_0}\right| \leqq \dfrac{1}{(1-|z_0|)^2}$, (Bieberbach ノ定理)

又 $z_2 \to z_1$ ナル極限ヲ考ヘ $z_1=z_0$ ト書ケバ

系2. $\dfrac{1-|z_0|}{(1+|z_0|)^3} \leqq |f'(z_0)| \leqq \dfrac{1+|z_0|}{(1-|z_0|)^3}$. (Bieberbach ノ定理)

Ⅳ. (5) ノ左辺ノ絶對値記号内ノ虚數部分ノミヲ考ヘルト,

定理4. $$\left|\arg\frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2} - \arg f'(z_1)\right| \leqq \log\frac{1+\left|\frac{z_1-z_2}{1-\bar{z}_1 z_2}\right|}{1-\left|\frac{z_1-z_2}{1-\bar{z}_1 z_2}\right|} + \arg(1-\bar{z}_1 z_2)$$

$z_1=0$, $z_2=z_0$ トオケバ

系1. $$\left|\arg\frac{f(z_0)}{z_0}\right| \leqq \log\frac{1+|z_0|}{1-|z_0|}.$$

$z_2=0$, $z_1=z_0$ トオケバ

系2. $$\left|\arg\frac{z_0 f'(z_0)}{f(z_0)}\right| \leqq \log\frac{1+|z_0|}{1-|z_0|}$$

(注意) 系1, 系2 ハ夫々定理1, 定理2カラモ出ル。

系3. $$\left|\arg\frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2}\right| \leqq \log\frac{1+\left|\frac{z_1-z_2}{1-\bar{z}_1 z_2}\right|}{1-\left|\frac{z_1-z_2}{1-\bar{z}_1 z_2}\right|} + \arg(1-\bar{z}_1 z_2) + |\arg f'(z_1)|$$

他ノ拙論デ述ベタ様ニ

定理5. $|\arg f'(z_1)| \leqq 2|a_2|r + \frac{3}{2} r \log\frac{1+r}{1-r}\cdot\Theta$,

$r=|z_1|$, $0<\Theta<1$

デアルカラ

系3'. $$\left|\arg\frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2}\right| \leqq \log\frac{1+\left|\frac{z_1-z_2}{1-\bar{z}_1 z_2}\right|}{1-\left|\frac{z_1-z_2}{1-\bar{z}_1 z_2}\right|} + \arg(1-\bar{z}_1 z_2)$$

$$+2|a_2|r+\frac{3}{2}r\log\frac{1+r}{1-r}\text{Ⓗ}, \quad (r=|z_1|).$$

系3'ハ定理5ノ擴張デアル。($z_2\to z_1$ヲ考フレバ)

以上ニヨッテ從來未知デアッタ $\log\frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2}$ノWertbereichガ大体分ッタコトニナル。$|z|<1$デnormierenシタ單葉寫像函數$\varphi(z)$ニ對シテ、$\log\frac{\varphi(z_1)-\varphi(z_2)}{z_1-z_2}$ノWertbereichハGrötzschニヨッテ完全ニ研究サレテアッタ。(Grötzsch, Ber. Verh. sächs. Akad. Leipzig, 84 (1932), 269–278)

[2] Rengelノ Dissertation 中ノ Satz IV カラBloch常數ノ値ノ評價ニ關シ注意シタコトガアリ、Robinsonノ論文ニアルコトノ直接的ナ説明ヲシタコトガアルガ、モーッ同ジDissertation中ノSatz Vトシテ次ノコトガ掲ゲテアル。(K。ハ單位円: $|z|<1$ヲ表ハストス。)

$w=f(z)$ bilde K. schlicht normiert so ab, daß in der w-Ebene ∞ von 0 aus auf keinem Halbstrahl durch 0 erreichbar ist, ohne den Bildrand γ zu treffen. Die Entwicklung in 0 sei

$$f(z)=z+a_{n+1}z^{n+1}+a_{2n+1}z^{2n+1}+\cdots\cdots+a_{\nu n+1}z^{\nu n+1}+\cdots\cdots$$

mit reellen Koeffizienten. Dann gilt

(6) $$|a_{n+1}|\leqq\frac{2}{n},$$

(7) $a_{2n+1} \leqq \frac{n+1}{2} a_{n+1}^2 - \frac{1}{n}$.

(7) ハ Rogosinski ノ一定理ノ擴張ニナッテヰル。**)

ココニ注意シタイコトハ、係數が一般ニ複素數デアッテモ (6) ハ成立スルコト勿論ニシテ（明ラカナルが故ニ説明省略）、(7) モ次ノ様ニ擴張出來ル。

(8) $\left| \frac{n+1}{2} a_{n+1}^2 - a_{2n+1} \right| \leqq \frac{1}{n}$.

(8) ハ何ヒトノ應用性ヲ有スルモノト信ズル、事實 $n=1$ ナルトキニ成立スル。$|a_2^2 - a_3| \leqq 1$ ナル不等式ハ尚未知ノ事實ヲ解決スル能力ヲ有スル。

(8) ノ証明ハ簡單デアル。K. Löwner ノ定理ニヨリ

$$a_{n+1} = -\frac{2}{n}\int_0^\infty K(\tau) e^{-\tau} d\tau,$$

$$a_{2n+1} = 2\frac{n+1}{n^2}\left[\int_0^\infty K(\tau) e^{-\tau} d\tau\right]^2 - \frac{2}{n}\int_0^\infty K^2(\tau) e^{-2\tau} d\tau, \quad |K(\tau)| = 1$$

デアルカラ

(9) $$\frac{n+1}{2} a_{n+1}^2 - a_{2n+1} = \frac{2}{n}\int_0^\infty K^2(\tau) e^{-2\tau} d\tau.$$

$|K(\tau)| = 1$ デアルカラ上式ヨリ (8) ガ得ラレル。

——（以 上）——

**) Rogosinski ノ定理

$S_u(z) = z + a_3 z^3 + a_5 z^3 + \cdots\cdots$ ヲ $|z|<1$ ノデ正則單葉トシ係數ハ全部實數デアルトスレバ

$$a_5 \geqq -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} a_3^2 \geqq -\frac{1}{2}.$$

Math. Zeitschr. 35 (1932), S. 121 參照.