OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	Generalised Harmonic Analysis二就イテ（I）
Author(s)	北川, 敏男
Citation	全国紙上数学談話会. 1936, 74, p. 6-12
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74245
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

322. Generalised Harmonic Analysis ニ就イテ. (I)

北川敏男（阪大）

1. N. Wiener ハソノ論文 Tauberian Theorems (1932) ヲ結ブ=際シ、氏ノソコ=展開シタ Tauberian theorey ガ Neumann-Stone 等ノ calculus of operators =ヨリ再検討サレル日ノ近キヲ豫想スルト，述ベテ居ル。實際、コノ論文及ビコレ=先立ツ Generalised Harmonic Analysis (1930) ノ結果ハ Hilbert 空間=於ケル spectral theorey ト著シイ類似点ヲモツ。

以下、Wiener ノコノ課題=ツイテ最近考ヘテ居ルコトヲ別=順序モ立テズ申シ述ベタイト思フ。

2. Wiener ガソノ著書 The Fourier Integral デ定義シタ函數ノ class S ヲ考ヘル。即チ S ハ次ノ如キ $f(x)$ ノ全体オラナル:

$f(x)$ ハ $(-\infty, \infty)$ デ Measurable デアリ且ツスベテノ x =ツイテ

$$(1)\qquad \phi(x)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(x+\xi)\,\overline{f(\xi)}\,d\xi$$

ガ存在スルモノトスル。

今吾々ハ，コノ S =於イテ、任意ノ二ツノ函数 f, g =関シテ

(2) $$(f,g)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}f(\xi)\overline{g(\xi)}\,d\xi$$

ニ由リ inner product (f,g) ヲ定義シヤウ。然ルトキコレカラ Hilbert 空間論ニ於ケル如ク、

(3) (i) $(x,y)=\overline{(y,x)}$

(ii) $(\alpha x+\beta x',y)=\alpha(x,y)+\beta(x',y)$

(iii) $(x,x)\geqq 0$

ヲ得ルコトハ容易ニ分カル。更ニ S ニ於イテ絶對値，距離等同様ニ定義シ得ルコトハ言フマデモナイ。又、S ノ任意ノ有限個ノ Element ニ對シテ，

コレニ、一次独立ナ Element ガ常ニ存在スルコトハ B^2. almost periodic function ガ S ニ含マレテ居ルコトニ注意スレバヨイ。依ッテ Hilbert 空間ニナルタメニハ，

(4) 4.1. $(x,x)=0$ ナルトキ $x=0$

4.2. S ノ separability

4.3. S ノ Completeness

ノ三事實ガ要スルノミデアルガ——4.1. ハ暫ク措ク——4.2. ノ成立シナイコトハ明カデアル。蓋シ S ハ almost periodic function ノ全体ヲ含ムカラ。ソコデ、吾々ハ，S ニ對シテ、既知ノ理論ヲ適用シヤウトスレバ、ソレハ，Rellich, Löwer 等ニ依ル廣義ヒルベルト空間ノ spectral theorey ニ依ッ外ハナイノデアル，但シ假リニ、4.3. ガ確保サレタト

スレバデアル。

然ルニ、4.3.ハ成立スルコトデアルカ，更ニハ、ソノ成否が容易ニ証明サレルコトデアロウカ？ 筆者ハ，コレニツイテ諸賢ノ御教示ヲ仰ギタイト思フモノデアルが、シオシ今筆者が追マウトスル方針ハ，4.3.ヲ証明シテ行カウト云フノデハナイ。寧ロコレヲ回避スル立場ヲトル。

Wiener ノ理論ヲ通覧スルトキ、空間 S ノ Completeness ハ，何処ニモ必要トシテ居ラナイコトヲ看ルノデアツテ、氏ノ理論ノ検討ニ之レヲ確立シテカラデナクテハ進マレナイ様デハ，餘リニ迂路ヲ経ルトノ感ヲ抱カナケレバナラヌカラデアル。

3. Completeness ヲ避ケルト云ツテモ、コレカラ述ベルコトハ，如何ナル立場カラ Wiener ノ理論が如何ニ眺メラレルカトイフニ止マリ、別ニ Rellich, Löwer ノ外ニ新シイコトヲ考ヘマウト志スノデハナイ。要スルニ，以下ノ考察ハ，次ノ四項ニ盡キル：

(i) S ニ對シテコレヲ含ム空間，即チ S ノ Element が悉クソレニ属スルマウナ空間ノ集合 S_ϵ ヲ考ヘル。

(ii) コヽニ各空間 S_ϵ ハ，廣義ゆーくりっど空間[1]デアルトスル。（以下デハ實ハ Hilbert 空間ニナッテキル）

(iii) 空間 S_ϵ ニ於イテ定義サレタ inner product ヲ $(f,g)_\epsilon$ デ表ハス。然ルトキ f 及ビ g が S ニ属スルトキ常ニ次ノ関係が成立スルトスル：

(5) $\lim_{\epsilon \to 0} (f, g)_\epsilon = (f, g)$

(iv) S_ϵ ニ於イテハ，Rellich, Löwer ノ理論ニ由ル spectral theorey ガ成立ツタカラ (5) ニヨッテ (f,g) ノ rpiresentation ヲ得ル。

以上デ方針ハ盡キルノデ、詳シ ワカリキッタコトニ過ギナイノデアルガ、Wiener ノ方法ニ必要ナコトハ，コレダケデアルヤウニ思ハレル。次節ニ於イテコレヲ具体的ニ述ベヤウ。

4. 今或ル定マッタ任意ノ正数 ϵ ニ對シテ

(6) $$\int_{-\infty}^{\infty} \left| f(\xi) \frac{\sin \epsilon \xi}{\sqrt{\epsilon}\, \xi} \right|^2 d\xi < \infty$$

ナル如キ f ノ全体ニ考ヘ，カゝル二ツノ函数 f, g ニツイテソレラノ inner product トシテ

---

(1) 以下ニ見ラレル如ク S_ϵ ハ通常ノ Hilbert 空間デ separability サヘ成立スル。コゝニ議論ノ方針トシテハ，S_ϵ ハ廣義ユークリッド空間デアッテヨイコトヲ強調シテオク。蓋シ Wiener ノ諸定理ノ現ルニハ，Stone ノ定理（§4参照）ノミガ必要デアッテ、コレハ $\{V_t\}$ ガ t ニ關シテ連続ナラバ，Bochner ノ議論デ廣義ユークリッド空間ニ於イテモソノマゝ成リ立ツカラデアル。（コノコトハ吉田耕作氏ガ嘗ッテ本誌デ指摘サレタコトデアルカラ御参照ヲ乞フ。）

(7) $$(f,g)_\epsilon=\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\overline{g(\xi)}\,\frac{\sin^2\epsilon\xi}{\epsilon\xi^2}\,d\xi$$

ヲ採用シ、絶對値，距離ヲ通常ノ如ク

(8) 絶對値 $|x|_\epsilon=\sqrt{(x,x)_\epsilon}$

距離 $|x-y|_\epsilon$

ヲ定義スル。コレヲ空間 S_ϵ ト云フ。コレニツイテ、以下ノ議論ニ要用ナコトハ次ノI, II ノ性質デアル：

I. 明カニ S_ϵ ハ一ツノ Hilbert space ヲ形成スル、蓋シ S_ϵ ニ任意ノ函数 $f(\xi)$ ヲトルトキ Hilbert space $L^2(-\infty,\infty)$ ニ於テ

(9) $$f(\xi)\frac{\sin\epsilon\xi}{\epsilon\xi}$$

ナル函数ヲ考ヘル、コノ對應ハ一對一デアリ、isometric デアルカラデアル（(7)參照）。

依ツテ S_ϵ ニ於イテ spectral theorey ガ、成立スルノデアルガ、以下ニ必要ナコトハ

(i) unitary operator ノ One-parameter group $\{U_t\}$ ニ關スル Stone ノ定理 — 即チ

(10) $$(U_t f,g)_\epsilon=\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\,d(E_\epsilon(\lambda)f,g)_\epsilon$$

(ii) コノ $\{U_t\}$ カラ S_ϵ ニ於ケル Operator ノ Schar $\{\Lambda_\lambda\}$ ヲ次ノ關係ニヨリ定義スル。

$$(11)\quad \Lambda_\delta f=\int_{-\infty}^{\infty} K(t)\,U_{t+\delta} f\,dt \quad (1)$$

但シ，コレニハ例ヘバ，$K(t)$ ガ $(-\infty,\infty)$ デ有界且ツ可測而シテ

$$(12)\quad \int_{-\infty}^{\infty} |K(t)|^2(1+|t|^2)\,dt<\infty$$

デアレバ充分デアル。

然ルトキ

$$(13)\quad (\Lambda_\delta f,g)_\epsilon=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\delta\lambda}\left(\int_{-\infty}^{\infty} K(t)\,e^{it\lambda}dt\right)d(E_\epsilon(\lambda)f,g)_\epsilon$$

II. (i) S ニ属スル f ハ又 S_ϵ ニ属スル。茲ニ ϵ ハ任意ノ正数デアル。

吾々ノ議論デ主要ナコノ事實ハ，f ガ S ニ属スルトキ

$$(14)\quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(\xi)|^2}{1+|\xi|^2}\,d\xi<\infty$$

ヲ示セバヨイ。コレニ對ヘルニハ，Wiener: The Fourier Integral 定理20ヲ用キル。

(ii) S ニ属スル任意ノ二ツノ f,g ニツイテ

$$(15)\quad \lim_{\epsilon\to 0}(f,g)_\epsilon=(f,g)$$

コレニ對シテハ Wiener 定理21ヲ modify スル．即チ

---

(1) コノ意味ハ例ヘバ Bochner Neumann Operational-differential equation I.，Part I. Preliminaries 1 ヲ見ラレタシ。

定理21ハ

$$\lim_{\epsilon \to 0} (f, f)_\epsilon = (f, f)$$

ヲ示シテヰルノデアルカラ。