OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	多元環ノ Idealノ最小公倍數, 最大公約數, Ⅱ.
Author(s)	中山, 正
Citation	全国紙上数学談話会. 1936, 74, p. 12-16
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74246
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

323. 多元環ノIdealノ最小公倍數，最大公約數，II.

中山　正（阪大）

§1 訂正．本誌71号308ページニ於テ域ル多元環Aノ中ノ二ツノ normal + Ideal ノ Summe, Durchschnitt ガマタ normal + Ideal ナル爲メノ必要且ツ充分ナ條件ヲ述ベマシタガ，ソコニ述ベタ條件デハ A/K ヲ normal-einfach トスベキデシタ、一般ノ einfach，更ニ一般ノ halbeinfach + A/K ニ於テハ同稿 14頁 15行目ノ「Kノ如何ナル Primideal モ」ト云フ代リニ「Aノ Zentrumノ如何ナル Primideal モ」トスベキデシタ。Radikal ヲ有スル多元環Aニ於テハ A/R（RハRadikal）ヲ考察スレバヨイ。

§2 二ツノ Maximalordnung．以下簡單ノタメ A/K ハ normal-einfach トスル（Kハ勿論代數体）．一般，Ideal ハシバラク措キ，特ニ二ツノ Maximalordnung

$\mathfrak{o}, \bar{\mathfrak{o}}$ ノ Durchschnitt $\mathfrak{o}$ ヘ $\bar{\mathfrak{o}}$ ヲ考ヘルト、コレハ勿モ角 A ニ於ケルーツノ Ordnung ヲナスガ、$\mathfrak{o} \neq \bar{\mathfrak{o}}$ ナラバ確カニ Maximalordnung デナイ。而シテ Summe $\mathfrak{o}+\bar{\mathfrak{o}}$ (前稿デハ記号 $(\mathfrak{o}, \bar{\mathfrak{o}})$ ヲ使ッタガ，以下十ニカヘル) ハ $\mathfrak{o} \cap \bar{\mathfrak{o}}$ ノ zweiseitig + (normal ナラザル) Ideal ナルコトハ明カデアルガ，更ニソノ Links- 並ビニ Rechts-ordnung ハ丁度 $\mathfrak{o} \cap \bar{\mathfrak{o}}$ ニナル．<u>即チ $\mathfrak{o}+\bar{\mathfrak{o}}$ ハ $\mathfrak{o} \cap \bar{\mathfrak{o}}$ ヲ Links- 及ビ Rechtsordnung ニモツ gleichseitig + (normal ナラザル) Ideal デアル</u> (normal ナルハ $\mathfrak{o}$ ト $\bar{\mathfrak{o}}$ ガ一致スル時ニ限ル)。

証明． マヘリ im Kleinen ニモッテ行ク．而シテシバラク K ヲ p 進数体トスル．先ヅ ξ ヲ $\mathfrak{o}+\bar{\mathfrak{o}}$ ノ Rechtsordnung ノ元トスレバ

$$(\mathfrak{o}+\bar{\mathfrak{o}})\xi \subseteq \mathfrak{o}+\bar{\mathfrak{o}} \quad \text{即チ} \quad \mathfrak{o}\xi \subseteq \mathfrak{o}+\bar{\mathfrak{o}},\ \bar{\mathfrak{o}}\xi \subseteq \mathfrak{o}+\bar{\mathfrak{o}}$$

デアル、假ニ $\xi \neq \mathfrak{o}$ トスル．然ラバ $\mathfrak{o}\xi + \mathfrak{o}$ ハ <u>gang ナラザル</u> $\mathfrak{o}$ ノ左 Ideal デアル。ヨッテ $\mathfrak{o}+\bar{\mathfrak{o}}$ カ $\mathfrak{o}$ ノ ganz デナイ左 Ideal ヲ含ムコトニナル、ソレガ矛盾ナルコトヲ述ベル。

例ノ如ク A ヲ多元体 D ノ Matrizenalgebra トシテ，シカモ $\mathfrak{o}$ カ $\mathfrak{o}_D$ ノ ($\mathfrak{o}_D$ ハ D ノ Maximalordnung トス) 行列全体カラ成ル様ニ表現スル。$A = D_p$. $\mathfrak{a}$ ヲ $\mathfrak{o}$ ノ左 Ideal トスレバ $\mathfrak{a}$ ノ行列ノ各行ハ p 次ノ Vektor カラナルアル $\mathfrak{o}_D$- Modul ノ Vektor ヲ任意ニウゴク、$\mathfrak{a}$ ガ

gang ヂナケレバ $\mathfrak{o}$ = 含マレナイ α ノ元ガアルカラ、ソノ一ツヲ $\alpha=(\alpha_{ik})$ $(\alpha_{ik}\in D)$ トシ，α_{ik} ノ中デソレヲ丁度割ル $\mathfrak{p}_D$ ($\mathfrak{p}_D$ ハ D ノ Primideal) ノ羃ガ最低トナルモノノ一ツヲ $\alpha_{i_0k_0}$ トスル。

$$\mathfrak{p}_D^{a} \parallel \alpha_{i_0,k_0},\quad a<0\ ;\quad \mathfrak{p}_D^{a} \mid \alpha_{ik}\quad (i,k=1,2,\cdots\cdots,r)$$

然ラバ α ハ第 k_0 行ガ $(\alpha_{i_0 1}, \alpha_{i_0 2}, \cdots\cdots, \alpha_{i_0 r})$ ガアッテ他ハスベテ 0 ナル行列ガアル。ヨッテ若シ $\alpha\equiv\mathfrak{o}+\bar{\mathfrak{o}}$ ナラバ $\bar{\mathfrak{o}}$ ハ第 k_0 行ガマヘリ $(\alpha_{i_0 1}, \cdots\cdots, \alpha_{i_0 r})$ デ他ハスベテ $\mathfrak{o}_D$ ノ元デアルマウナ行列ガアル、ソレヲ α_1 トスル、ソシテ $\alpha_1^2=(\beta_{ik})$ トスレバ容易ニワカル如ク ($a<0$ ニ注意サレタイ)，スベテノ β_{ik} ハ $\mathfrak{p}_D^{2a}$ デワレ，$\beta_{k_0 k_0}$ ハ丁度 $\mathfrak{p}_D^{2a}$ デ，第 k_0 以外ノ他行ノ元ハ $\mathfrak{p}_D^{2a}$ ヨリ実際高イ羃デワレル。同様ニ $\alpha_1^4=(\gamma_{ik})$ トスレバ、ドノ γ_{ik} モ $\mathfrak{p}_D^{4a}$ デワレ，$\gamma_{k_0 k_0}$ ハ丁度 $\mathfrak{p}_D^{4a}$ デ，第 k_0 以外ノ行ノ元ハソレヨリ実際高イ羃デワレル、カクシテ結局 $\bar{\mathfrak{o}}$ ノ中ニハソレガ含ム $\mathfrak{p}_D$ ノ羃ガイクラデモ低イ元ヲモツ行列ガ存在スルコトニナリ，ソレハ矛盾デアル。ヨッテ $\alpha\neq\mathfrak{o}+\bar{\mathfrak{o}}$ ガ，従ッテモトニ戻ッテ $\xi\in\mathfrak{o}$ ガ証明サレタ。同様ニ $\xi\in\bar{\mathfrak{o}}$ トナリ $\mathfrak{o}+\bar{\mathfrak{o}}$ ノ Rechtsordnung ハ $\mathfrak{o}\cap\bar{\mathfrak{o}}$ トナル。同様ニ Linksordnung モソウデアル。im grossen ニウツルノモ大シタ困難ハナイ、証明オヘリ。

§3. (normal +) Ideal ヲニツノ Hauptideal

ノ Summe トシテ表ハスコト。ヨク知ラレテヰル様ニ代数体ノ Ideal ハ二ツノ元デ生成サレル。即チ二ツノ Hauptideal ノ最大公約数トシテ表ハセル。同様ニ A ノアル(normal +) Ideal $\mathfrak{a}$ ノ Links- 及ビ Rechts-Ordnung ヲ $\mathfrak{O}_L$, $\mathfrak{O}_R$ トスレバ $\mathfrak{a}$ ハ $\mathfrak{O}_L$ ノ二ツノ Hauptlinksideal ノ Surime トシテ表ハセル。左ノカハリニ右ヲトッテモ同様ナルハ明カ。然ルニ更ニ $\mathfrak{O}_L$ ノ一ツノ Hauptlinksideal 及ビ $\mathfrak{O}_R$ ノ一ツノ Hauptrechtsideal ノ Summe トシテ表ハスコトモ出来ル。更ニ一般ニ任意ニアル Maximalordnung $\mathfrak{O}_1$ ヲ指定シテオイテ $\mathfrak{O}_1$ ノ Hauptrechtsideal (又ハ Hauptlinksideal) ト $\mathfrak{O}_L$ ノ Hauptlinksideal ノ Summe トシテ表ハスコトモ出来ル。

証明ハ代数体ノ場合ト同ジ考ヘデ出来ルカラ省略シマス。

§4. 序デニ A ヲフクム多元環 A′ ニ對スル関係ニツイテ一寸述ベテオク。タトヘバ A ノ Koeffizientenkörper ヲ擴大スルトカ，他ノアル多元環トノ直積ヲツクルトカ，兎ニ角 A ヲフクム任意ノ（但シ何論代数体ノ上ノ）多元環ヲ A′ トスル、$\mathfrak{O}$ ヲ A ノ任意ノ Maximalordnung トスレバ A′ ニハ $\mathfrak{O}$ ヲ含ム Maximalordnung が存在スルコトハ容易ニ証明サレル。ソノ一ツヲ $\mathfrak{O}'$ トスル。$\mathfrak{a}$, $\bar{\mathfrak{a}}$ ヲ A ニ於ケル $\mathfrak{O}$ ノ左-Ideal トスレバ A′ ニ於テ $\mathfrak{O}'(\mathfrak{a}+\bar{\mathfrak{a}})$, $\mathfrak{O}'(\mathfrak{a}\cap\bar{\mathfrak{a}})$ ガソレゾレ $\mathfrak{O}'\mathfrak{a}$, $\mathfrak{O}'\bar{\mathfrak{a}}$ ノ Summe 及ビ Durchschnitt ニナル、ソレヲ証明スルニハ先ヅ $\mathfrak{O}'\mathfrak{a}+\mathfrak{O}'\bar{\mathfrak{a}}=\mathfrak{O}'(\mathfrak{a}+\bar{\mathfrak{a}})$ ノ

方ハ直チニ証明サレ、ソレカラ前稿ニ一寸述ベタ Norm ノ関係ヲ使ヘバ $\mathfrak{O}'\mathfrak{a}+\mathfrak{O}'\bar{\mathfrak{a}}=\mathfrak{O}'(\mathfrak{a}+\bar{\mathfrak{a}})$ モ証明サレル。(Durchschnitt ノ方モ或ヒハ Summe, Norm ノ関係等ヲ経ナイデ直接ニ云ヘルノカモ知レナイガ，僕ニハ一寸氣ヅキマセン)

兎モ角一ツノ Maximalordnung ノ二ツノ右(又ハ左) Ideal ノ Summe, Durchschnitt ヲ考察スルノハ自然的デアツテ，前稿ニ述ベタノハ要スルニ im Kleinen デハ單純環ノ二ツノ normal + Ideal ノ Summe, Durchschnitt ガ再ビ normal ニナルノハ此ノ場合及ビ一方ガ他方ニ含マレルトイフ trivial ナ場合以外ニナイトイフコトデアツタ。而シテソウデナイ場合ニハ最小公倍數，最大公約數等ト呼ブベキ様ナ意味ハ少シク失ツテキルワケデアルガ、然シ§2デ一寸扱ツタ様ニ二ツノ Maximalordnung ノ Durchschnitt, Summe 等ハソノ二ツノ Maximalordnung ノ間ノ関係ヲ考察スル際ニヤハリ必要ナ且ツ興味モアルモノノ様ニ思ハレル、実ハ§2ヨリモ、モ少シ精シイ結果ヲ出シタイト思ツテヰマスノデ、マタ御報告スル機會モアルコトト思ヒマス。