



Title	行列方程式 $ex=A$ ノ解ニ就イテ
Author(s)	浅野, 啓三
Citation	全国紙上数学談話会. 1936, 74, p. 22-28
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74249
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

326. 行列方程式 $e^X = A$ の解 = 就テ

浅野 威 三 (阪大)

複素数体 = 於ケル n 次, *Matrix* を取扱フ。 *Matrix* A , $\text{Det. } |A| \neq 0$ 十ラベ $e^X = A$ の解ヲ有スル, (紙上数学談話會 309, 310, 論文参照)。以下此ノ解 = ツイテ シラベル。

定理 *Matrix* $xE - B$, *Elementarteiler* (1ト異ル) ヲ $(x - \omega_1)^{p_1}, \dots, (x - \omega_m)^{p_m}$ ($p_1 + \dots + p_m = n$) トスレバ

$$xE - A \quad \left(A = e^B = E + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{B^r}{r!} \right)$$

、Elementarteiler $\wedge (x-e^{w_1})^{p_1}, \dots, (x-e^{w_m})^{p_m}$

デアル。

lemma: n 次, Matrix

$$\begin{pmatrix} x & & & 0 \\ & \alpha_1 & & \\ & & \alpha_2 & \\ & & & \ddots \\ & & & & \alpha_{n-1} & \\ & & & & & x \end{pmatrix} \quad (\alpha_i \neq 0)$$

、Elementarteiler $\wedge x^n, 1, \dots, 1$ デアル。

何ト+レバ此, Matrix, Det. $\wedge x^n, n-1$ 次,

Minor, 最大公約数 $\wedge$

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & x & 0 \\ & \ddots & \ddots \\ & & \alpha_{n-1} & x \end{vmatrix} = \alpha_1^{n-1} + C_1 x + \dots \quad (\alpha_1^{n-1} \neq 0)$$

及ビ

$$\begin{vmatrix} x & & 0 \\ & \alpha_1 & \\ & & \ddots \\ & & & \alpha_{n-2} & \alpha_1 & x \end{vmatrix} = x^{n-1}$$

、公約数 = ナルコトオラ $|$ 二等シイ。從ツテ Elementarteiler $\wedge x^n, 1, \dots, 1$ = ナル。

定理, 証明:

假定 = ヲリ

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} B_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B_m \end{pmatrix}, \quad B_i = \begin{pmatrix} \overbrace{\omega_r}^{p_r} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 & \omega_r \end{pmatrix}$$

トナル Matrix P が存在スル *Elementarteiler* ハ
Matrix A を transform シテモ変ラナカラ A の代リ
 $P^{-1}AP = e^{P^{-1}BP}$ を使フ。

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} e^{B_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{B_m} \end{pmatrix},$$

$$B_r = \omega_r E_r + F_r$$

$$E_r = \begin{pmatrix} \overbrace{1}^{p_r} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}, \quad F_r = \begin{pmatrix} \overbrace{0}^{p_r} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_r^{p_r} = 0$$

$\omega_r E_r$ ト F_r ハ *kommutativ* ナル故

$$\begin{aligned} e^{B_r} &= e^{\omega_r E_r} e^{F_r} = e^{\omega_r E_r} \left(E_r + \frac{F_r}{1!} + \dots + \frac{F_r^{p_r-1}}{(p_r-1)!} \right) \\ &= \begin{pmatrix} e^{\omega_r} & & 0 \\ & \ddots & \\ \frac{e^{\omega_r}}{(p_r-1)!} & & e^{\omega_r} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$x E_r - e^{B_r}$, *Elementarteiler* ハ *lemma* = ヨリ $(x - e^{\omega_r})^{p_r}$,
1, -----, 1 トナル、コノコトカラ定理、成立スルコトが分ル。

(証明終リ)

$e^X = A$ の解が存在スルタメニ $|A| \neq 0$ トナルコトハ明カデア、今 $|A| \neq 0$ トスル、 $x \in -A$, *Elementarteiler* ヲ

$$(x - \lambda_1)^{p_1}, \dots, (x - \lambda_m)^{p_m}$$

トスルバ $|A| \neq 0$ ナル故 $\lambda_r \neq 0$

$$(x - \omega_1)^{p_1}, \dots, (x - \omega_m)^{p_m} \quad (\omega_r = \log \lambda_r)$$

ヲ *Elementarteiler* トスル *Matrix*

$$X_0 = \begin{pmatrix} B_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B_m \end{pmatrix}, \quad B_r = \begin{pmatrix} \omega_r & \overset{p_r}{\dots} & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 & \omega_r \end{pmatrix}$$

ヲ作ル、 ω_r ノ取り方ハ $2\pi i$ ノ整数倍ニ関シテ自由デア、 e^{X_0} ハ一意ニ定リ、 A 上 *Elementarteiler* ガ一致スル。

$$e^{X_0} = A^* = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_m \end{pmatrix}, \quad A_r = \begin{pmatrix} \lambda_r & & 0 \\ & \ddots & \\ \frac{\lambda_r}{(p_r-1)!} & & \lambda_r \end{pmatrix}$$

故ニ $A = P^{-1} A^* P = e^{P^{-1} X_0 P}$ トナル P ガ存在スル。 P ヲ A^* ヲ A ニ *transform* スル任意ノ *Matrix* トシ、 X_0 ヲ任意ニ上ノ様ニトスルバ $P^{-1} X_0 P$ ガ一般解ニナル、 P ハ $P \cdot Q$ ノ形ニ書ケル、コソニ P_0 ハ A^* ヲ A ニ *transform* スルーツノ *Matrix* ナ Q ($|Q| \neq 0$) ハ A ト可換ナル任意ノ *Matrix* デアル。

今 *Matrix* / *Element* ヲ実数ノ ϵ ニ制限スルバ次

ノ様 = ナル。

定理: $e^x = A$ が実数体ノ範圍ヲ解ヲ有スルタメニハ
 $x \in -A$, *Elementarteiler* $(x-\lambda_1)^{p_1}, \dots, (x-\lambda_m)^{p_m}$
 が *conjugate complex* , *pair* = ナルカ (λ が *real*
 ナラバ同ジモノガ *pair* = ナル) *pair* = ナラナイモノ
 = 對シテハ λ が *real positive* ナルコトが必要且ツ充ル
 デアル。

reelle Matrix , *Elementarteiler* ハ *Eigen-*
wert が *complex* = ナルモノハ *conjugate com-*
plex , *pair* カラ成ル。從ツテ上ノ條件ノ必要ナコトハ
 始メノ定理カラ容易ニ分ル。今コノ條件が満足ナレテアルモ
 ノトスル。

$x \in -A$, *Elementarteiler* 7

$$(x-\lambda_r)^{p_r} \quad (r=1, \dots, m_1) \quad (\lambda_r \text{ real pos.})$$

$$(x-\lambda_s)^{p_s} (x-\bar{\lambda}_s)^{p_s}, \quad (s=m_1+1, \dots, m_1+m_2)$$

(*conjugate complex* , $\lambda_s = \bar{\lambda}_s$ トナル場合ニ含メル)

トスル。

$$\omega_r = \log \lambda_r \text{ real}, \quad \omega_s = \log \lambda_s, \quad \bar{\omega}_s = \log \bar{\lambda}_s$$

conjugate complex = ナル様 = トリ ($\omega_s = \bar{\omega}_s$ トナツ
 テモヨイ) 次ノ如ク $(x-\omega_r)^{p_r}, (x-\omega_s)^{p_s}, (x-\bar{\omega}_s)^{p_s}$ 7
Elementarteiler トスル *reelle Matrix* X_0 7 作ル。

$$E_l = \begin{pmatrix} \overset{p_l}{\text{---}} & & \\ 1 & \text{---} & 0 \\ & \text{---} & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad F_l = \begin{pmatrix} \overset{p_l}{\text{---}} & & \\ 0 & \text{---} & 0 \\ & \text{---} & \\ 1 & \text{---} & \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad (1 \leq l \leq m_1+m_2)$$

トシ

$$B_r = \omega_r E_r + F_r$$

$$B_s = U_s \begin{pmatrix} \omega_s E_s + F_s & 0 \\ 0 & \bar{\omega}_s E_s + \bar{F}_s \end{pmatrix} U_s^{-1}, \quad U_s = \begin{pmatrix} iE_s & -iE_s \\ E_s & E_s \end{pmatrix}$$

トスル。 $\omega_s = \alpha_s + \beta_s i$ トスルベ

$$B_s = \begin{pmatrix} \alpha_s E_s + F_s, & -\beta_s E_s \\ \beta_s E_s, & \alpha_s E_s + F_s \end{pmatrix}$$

トナツテ B_s ハ real Matrix. $\therefore$ Elementary-
teiler ハ $(x - \omega_s)^{p_s}, (x - \bar{\omega}_s)^{p_s}$ ナル。

$$X_0 = \begin{pmatrix} B_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B_{m_1+m_2} \end{pmatrix}$$

然ルトキハ

$$A_r = e^{B_r} = \lambda_r e^{\bar{F}_r} = \begin{pmatrix} \lambda_r & & 0 \\ & \ddots & \\ \frac{\lambda_r}{(p_r-1)!} & & \lambda_r \end{pmatrix}$$

$$A_s = e^{B_s} = U_s \begin{pmatrix} e^{\omega_s E_s + F_s} & 0 \\ 0 & e^{\bar{\omega}_s E_s + \bar{F}_s} \end{pmatrix} U_s^{-1}$$

$$= \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} iE_s & -iE_s \\ E_s & E_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_s e^{F_s} & 0 \\ 0 & \bar{\lambda}_s e^{\bar{F}_s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_s & iE_s \\ -E_s & iE_s \end{pmatrix}$$

$$(\lambda_s = \alpha_s + \beta_s i)$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_s e^{F_s} & -\beta_s e^{F_s} \\ \beta_s e^{F_s} & \alpha_s e^{F_s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_s & -\beta_s \\ \beta_s & \alpha_s \end{pmatrix} \times e^{F_s}$$

故ニ

$$A^* = e^{X_0} = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_{m_1+m_2} \end{pmatrix}$$

ハ ω_2 の取り方 = カ、ハラバ一定スル、且又 A^* ト A ハ
Elementarteiler が一致スル、何レモ *real Matrix*
 デアルカラ

$$A = P^{-1} A^* P = e^{P^{-1} X_0 P}$$

トナル *reelle Matrix* P が存在スル。

前ト同様 = $P^{-1} A^* P = A$ = transform スル任意、
reelle Matrix トシ、 X_0 = 任意 = 上 = 述べタマウ = ト
 レバ $P^{-1} X_0 P$ が一般解トナル。

尚南雲氏、得タレタ結果 (金、紙、数、談 3/0) カラ次
 ノ定理ヲ得ル。

定理: 実数体 = 於ケル n 次、*Matrix* ノナス *Ring*
 = 於テ *Matrix* A ノ含ム連結 + *abel* 群が存在スルタメ
 = 必要且ツ充分ナル條件ハ A ノ *Elementarteiler* が前定
 理ノ條件ヲ満足スルコトデアル。