



Title	多元環ノ Idealノ 最小公倍数, 最大公約数, III
Author(s)	中山, 正
Citation	全国紙上数学談話会. 1936, 75, p. 7-13
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74252
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

329. 多元環, *Ideal*, 最小公倍数, 最大公約数 III

中山 正 (改訂)

§1. 前稿, 特 = II. §3 = ツミイテニツ, *Maximalordnung*, *Summe*, *Durchschnitt* ヲ考察シテ次, 定理ヲ証明スル。

定理 $\mathcal{O}_0, \mathcal{O}, \bar{\mathcal{O}}$ ヲ多元環 $\mathcal{Y}$ ノニツ, *Maximalordnung* トスル。ソノ時若シ $\mathcal{O}_0 \cap \mathcal{O} = \mathcal{O}_0 \cap \bar{\mathcal{O}}$ デアルナラバ $\mathcal{O} = \bar{\mathcal{O}}$ デアル。

定理 同様 = $\sigma_0 + \sigma = \sigma_0 + \bar{\sigma}$ ナラ $\sigma = \bar{\sigma}$ デアル。

コゝ = 第二ノ主張ハ第一ノカラ直グ出ル (直接 = モ云ヘルガ)。ソレハ前稿 II. §2 デ述ベタ如ク $\sigma_0 \wedge \sigma$ ハ $\sigma_0 + \sigma$ ノ左及び右 *Ordnung* デアルカラ $\sigma_0 + \sigma = \sigma_0 + \bar{\sigma}$ ナラ $\sigma_0 \wedge \sigma = \sigma_0 \wedge \bar{\sigma}$ トナルカラデアアル。

証明ノ大要ヲ述ベル。マハリ *im Kleinen* デ且ツ *normaleinfach* ノ場合 = マレバヨイ。

補助定理 1. アル p 進多元体 D ノ整数元カラナル行列

$$\xi = \begin{pmatrix} \pi^{p_1} & e_{12} & \cdots & e_{1r} \\ & \pi^{p_2} & \cdots & e_{2r} \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \pi^{p_r} \end{pmatrix}; \quad 0 \leq p_1 \leq p_2 \leq \cdots \leq p_r$$

= 於テ常 = $\pi^{p_i} | e_{ik}$ ナリトスル ($\pi \wedge D$ ノ *Primideal*, *Primelement*)。然レバ D ノ整数元カラナル適當ナ行列 η ヲトツテ

$$(1) \quad \eta^{-1} \begin{pmatrix} \pi^{p_1} & & & \\ & \pi^{p_2} & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \pi^{p_r} \end{pmatrix} \eta = \begin{pmatrix} \pi^{p_1} e'_{12} & \cdots & e'_{1r} \\ & \pi^{p_2} & \cdots & e'_{2r} \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \pi^{p_r} \end{pmatrix},$$

$$\text{且ツ } e'_{ik} \equiv e_{ik} \pmod{\pi^{p_k}}$$

トナルマデ = 出來ル。

(証明)

$$\eta = \begin{bmatrix} 1 & f_{12} & \cdots & f_{1r} \\ & 1 & & f_{2r} \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix} \quad \text{トオケ、} \eta^{-1} \in \eta^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & g_{12} & \cdots & g_{1r} \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}$$

ナル形 = ナル、然モ f が *ganz* ナラ $g \in \mathbb{Z}$ ヲデアアル、而シテ實際 = 書イテ見レバ $f_{ik} = g_{ik} (i < k)$ 、ハ f_{ik} 及ビ $l-j < k-i$ ナル如キ f_{jl} トノミ = ヲツテ決定サレル。

シカシテ $\begin{bmatrix} \pi^{p_1} & 0 \\ & \ddots \\ 0 & & \pi^{p_r} \end{bmatrix}$ ヲ η デ *transform* スルベ (1) ノ右

辺ノ様ナ形 = ナルガ、コノ際 $0 \leq p_1 \leq \cdots \leq p_r$, $\pi^{p_i} | e_{ik}$ ナル関係ヲツカヘバ $e'_{ik} \equiv e_{ik} \pmod{\pi^{p_i}}$ トナル様 = $f_{12}, f_{23}, \dots, f_{1r}$ ヲ順次 = キメテ行クコトが出来ルノデアアル、實際書クト長クナルカテ省略スル。

補助定理 2. $\mathcal{K}$ ヲ p 進数体 K ヲ *Zentrum* = ムツ單純環トシ、 $\mathcal{K}$ ノ一ツノ *Maximalordnung* $\mathcal{O}$ 及ビソノアル *ganz* ナ左 *Ideal* α が與ヘラレテキルトスル。然ラバ $\mathcal{K}$ ヲ適當 = 多元体 D ノ *Matrizenalgebra* トシテ、

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \mathcal{O} \subset D, \text{ ganz ナ元ノ行列全体トナリ} \\ 2) \alpha \text{ が} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \pi^{p_1} & e_{12} & \cdots & e_{1r} \\ & \ddots & & \\ 0 & & & \pi^{p_r} \end{bmatrix}; \\ \pi^{p_i} | e_{ik} \\ 0 \leq p_1 \leq p_2 \leq \cdots \leq p_r \end{array} \right.$$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{(勿論 } \gamma\gamma = \gamma \wedge \gamma^2 = (\gamma:K)/(D:K)) \\ \text{ナル形ノ元ヲ生成サレル } \sigma_0 \text{ノ左 Ideal} = \text{ナル。} \end{array} \right.$

様 = 表現スルコトが出来ル。

(証明) ソレ = ハ先ヅ 1) ダケガ満足サレル様 = 表現シ、
ソレカラ更 = 行、列ノ番號ノヨビ方ヲ適當 = カヘテ行ケバ

2) モ満足サレル様 = 出来ルコトが容易 = 証明サレル。

コノ二ツノ補助定理ヲツカヘバ容易 = 証明サレルゴトヲ

補助定理3 σ_0, σ ヲ $\mathbb{F}$ 進数体 K 上 $Zentrum = \epsilon$ ツ
單純環 $\mathcal{A}$, 任意, ニツ *Maximalordnung* トスル。
シカラバ $\mathcal{A}$ ヲ多元体 D 上 *Matrizenalgebra* トシ
テ

$\left\{ \begin{array}{l} 1) \sigma_0 \wedge D, \text{ ganz } + \text{元ノ行列全体, 即チ} \\ \sigma_0 = \sum_{i,k} \epsilon_{ik} \sigma_D, \\ 2) \sigma \wedge \text{適當ナ } p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_r \text{ ヲトツテ} \\ \sigma = \sum_{i,k} \epsilon_{ik} \sigma_D \pi^{p_k - p_i} \\ \text{ナル形} = \text{ナル。} \end{array} \right.$

様 = 表現スルコトが出来ル。又ジシ ϵ_{ik} ハソノ際、*Matrizeneinheiten*, σ_D ハ D 上 *Maximalordnung* トス。

更 = 他方 = 於テ

補助定理4 $\mathbb{F}$ 進多元体 D 上 *Matrizenalgebra*
 $\mathcal{A} = D_r$ ノアル *Maximalordnung* σ ガソノ r 個ノ對

角線上, *Matrizeneinheiten* $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \dots, \varepsilon_{rr}$

ヲ含ンデキルナラバ適當 = $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_r$ ヲトツテ

$$\sigma = \sum_{i,k} \varepsilon_{ik} \pi^{\nu_k - \nu_i} \sigma_D$$

ナル形 = カケル。

(証明) $\sigma \ni \varepsilon_{ii}$ ナルコトカラ σ ハ $\sum_{i,k} \varepsilon_{ik} \pi^{a_{ik}} \sigma_D$ ナル形

= ナリ、 σ が *Maximalordnung* ナルコトカラ $\sum a_{ik} = 0$

トナル。勿論 $a_{il} + a_{lk} \geq a_{ik}$ デアルガ、コレト $\sum a_{ik} = 0$

ナル関係カラ適當 = $\nu_1, \dots, \nu_r$ ヲトツテ $a_{ik} = \nu_k - \nu_i$

ナル形 = 出來ルコトガ証明セラレル。

補助定理 3, 4 カラ我々ノ主張ガ容易 = ミチビカレル。

$\sigma_0, \sigma, \bar{\sigma}$, σ_0, σ = 補助定理 3 ヲ適用シテ、ソコノ條件ヲ

ミタス様 = γ ヲ表現スレバ

$$\begin{aligned} \sigma_0 \cap \sigma &= \sum_{i,k} \varepsilon_{ik} \pi^{\max(0, \nu_k - \nu_i)} \sigma_D \\ &= \sum_{i < k} \varepsilon_{ik} \pi^{\nu_k - \nu_i} \sigma_D + \sum_{i \geq k} \varepsilon_{ik} \sigma_D \end{aligned}$$

トナル。シカシテ $\sigma_0 \cap \sigma$ ハ $\varepsilon_{11}, \dots, \varepsilon_{rr}$ ヲフクム

カラ $\sigma_0 \cap \sigma = \sigma_0 \cap \bar{\sigma}$ ナラバ $\bar{\sigma}$ ハ 補助定理 4 ノ條件ヲミタ

シ、從ツテ

$$\bar{\sigma} = \sum \varepsilon_{ik} \pi^{\nu_k - \nu_i} \sigma_D,$$

$$\sigma_0 \cap \bar{\sigma} = \sum \varepsilon_{ik} \pi^{\max(0, \nu_k - \nu_i)} \sigma_D$$

トナル、ヨツテ

$$(2) \text{Max}(0, \nu_k - \nu_i) = \text{Max}(0, \rho_k - \rho_i); \\ i, k = 1, 2, \dots, r$$

トナリ、コレカラ容易 $= \rho_k - \rho_i = \nu_k - \nu_i$ がスベテ、 i, k
= 成立ツ、ヨツテ $\sigma \cap \bar{\sigma}$ ハ一致スル。

(結果が一寸意外デモアルノデ少シク不安デスが多分)
(間違ハナイツモリデス。

§2. 更 =

定理 $\sigma_0 \cap \sigma \subseteq \sigma_0 \cap \bar{\sigma}$ ナラ $\sigma_0 + \sigma \subseteq \sigma_0 + \bar{\sigma}$ デ
アル。

(証明) ソレハヤハリ上ノ補助定理3, 4ヲツカツテ上
ノ証明ト全ク同様デアツテ (2) ノカハリ =

$$\text{Max}(0, \nu_k - \nu_i) \leq \text{Max}(0, \rho_k - \rho_i)$$

トナリ、シタガツテヤハリ $\nu_1 \leq \nu_2 \leq \dots \leq \nu_r$ デ、且ツ
 $k > i$ ナラバ $\nu_k - \nu_i \leq \rho_k - \rho_i$ トナル。依ツテ

$\sigma_0 + \bar{\sigma} \subseteq \sigma_0 + \sigma$ ナルコトハ容易 = 証明セラレル。更 =
逆 =

定理 $\sigma_0 + \sigma \subseteq \sigma_0 + \bar{\sigma}$ ナラ $\sigma_0 \cap \sigma \subseteq \sigma_0 \cap \bar{\sigma}$ デアル
モ成立スルが、ソノ証明ハ次ノ稿 = 書カセテイタヅキタイ。
然モ

定理 $\sigma_0 \cap \sigma \subseteq \sigma_0 \cap \bar{\sigma}$ (即チ $\sigma_0 + \sigma \subseteq \sigma_0 + \bar{\sigma}$) ナラバ σ
ノ σ_0 = 對スル *Distanzideal* ハ $\bar{\sigma}$, σ_0 = 對スルソレ
= ヨツテ割レル。

(証明) ソレハヤハリ $V_k - V_i \leq \rho_k - \rho_i$ ナルコトカラ 容易ニ証明セラレル。

云ヘカヘレバ *Durchschnitt* が小ニナルホド遠ク(?) ナルト云フ結果デアル。タビシエノ定理ノ逆が成立タナイコトハ容易ニワカル。