



Title	Mazzoni氏ノ平均値ノ定理ニ就テノ一注意
Author(s)	高須, 鶴三郎
Citation	全国紙上数学談話会. 1936, 76, p. 1-4
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74253
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

330. Mazgoni 氏平均値ノ定理ニ就テノ 一注意

高須 鶴三郎 (東北大)

P. Mazgoni, Rend. Palermo, 52 (1923) = 74

$$(1) \quad f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!} f'(x) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x + \frac{1}{n+1}h) \\ + \frac{nh^{n+2}}{2(n+1)(n+2)!} f^{(n+2)}(x + \theta h), \quad 0 < \theta < 1$$

ノ型ノ平均値ノ定理ハ R. Rathe, Math. Z. 9 (1924) = 依リ
 $f^{(n+1)}(x) \neq 0$ ナルトキニシテ意義深イモノデアリマスガ、
 $f^{(n+i)}(x) = 0, (i=1, 2, \dots, n+p-1), f^{(n+p)}(x) \neq 0$ ナ
 ル時ニシテ $\frac{1}{n+1}$ ノ代リニ L. Sokolowski, Tohoku M. J.
 31 (1929), p. 182 = 基キ $\sigma_n(p) = 1: \sqrt[p]{\frac{n+p}{p}}$ ヲトツテ
 Mazgoni ノ真似ヲシテ (1) ノ拡張ヲ試ミ、 $p=1$ ナルトキ
 (1) ガ出ル様ナモノヲ探シテモ微分ガケデハ困難ガアツテ仲
 々出テ來ナカツタノヲ、中野杏五郎君ノ日本数物記事、17
 (1935) = 74 ノ平均値ノ定理即チ $(n+p+1)$ 回微分可能ニシテ
 $f^{(n+p+1)}(x)$ ガ $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n+p+1}, x$ ヲ含ム最小
 閉區間 $[x, x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n+p+1}]$ ナ積分可能ナ

$$(2) \quad (\xi_1 - x_0)(\xi_2 - x_1) \cdots (\xi_{n+p+1} - x_{n+p})$$

ガ

$$(3) \quad \xi_1 \in [x, x_0], \xi_2 \in [x_1, x_1], \dots, \xi_{n+p+1} \in [x_{n+p}, x_{n+p}]$$

デ正頁号ヲ変ヘナイ時ハ

$$\begin{aligned}
 (4) \quad f(x) = & f(x_0) + f'(x_1) \int_{x_0}^x d\xi_1 + f''(x_2) \int_{x_0}^x d\xi_1 \int_{x_1}^{\xi_1} d\xi_2 + \dots \\
 & + f^{(n+p)}(x_{n+p}) \int_{x_0}^x d\xi_1 \int_{x_1}^{\xi_1} d\xi_2 \dots \int_{x_{n+p-1}}^{\xi_{n+p-1}} d\xi_{n+p} \\
 & + f^{(n+p+1)}(\xi) \int_{x_0}^x d\xi_1 \int_{x_1}^{\xi_1} d\xi_2 \dots \int_{x_{n+p-1}}^{\xi_{n+p-1}} d\xi_{n+p} \int_{x_{n+p}}^{\xi_{n+p}} d\xi_{n+p+1}
 \end{aligned}$$

ナレ如キ ξ が $[x, x_0, x_1, \dots, x_{n+p}]$ = 存在スルト云フ

定理ニ於テ

$$\begin{aligned}
 x // x+h, \quad x_0 = x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = x_{n+1} = x_{n+2} = \dots = x_{n+p-1} = x, \\
 x_n = x_{n+p} = \sigma_n(p)h, \quad f^{(n+1)}(x) = f^{(n+2)}(x) = \dots = f^{(n+p-1)}(x) = 0, \\
 f^{(n+p)}(x) \neq 0 \quad \text{ト置クト (1) ノ拡張が出テ来ルト云フコ}
 \end{aligned}$$

トヲ 外ノ結果ト共ニ教物記事ノ 1935 十二月号ニ報告シテ置
 キマシタ。其シテ (2) が (3) デ正頁号ヲ変ヘナイコトハ容易
 ニ見ラレルトシテ省イテ置キマシタ。然シ後カラ其ノ容易ノ
 程度が省略スベキ程度デナイコトニ氣附イテ後悔シテ居リマ
 ス。見カケ上 (2) が (3) デ正頁号ヲ変ヘル様ニサヘ見エテ誤
 トシテ攻撃セラレル憂サヘアリマスカラ其ノ証明ヲ略説サセ
 テ頂キマス、其レニハ p. 490 = 次ノ様ナ脚註ヲツケタライ
 イト思ヒマス。

Dass das Produkt $(\xi_{n+1} - x_n)(\xi_{n+p+1} - x_{n+p})$
 bei den Veränderungen von $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}$
 in (4) ihr Vorzeichen durchaus nicht ändert,

ersieht man folgendermassen.

$$\begin{aligned}
 & \int_x^{x+h} d\xi_1 \int_x^{\xi_1} d\xi_2 \dots \int_x^{\xi_{n+p-1}} d\xi_{n+p} \int_x^{x+\sigma_n(p)h} d\xi_{n+p+1} \\
 &= \int_x^{x+h} d\xi_1 \int_x^{\xi_1} d\xi_2 \dots \int_x^{\xi_{n+p-1}} d\xi_{n+p} [\sigma_n(p)h] \\
 &= \sigma_n(p)h \int_x^{x+h} d\xi_1 \int_x^{\xi_1} d\xi_2 \dots \int_x^{\xi_{n+p-1}} d\xi_{n+p} \\
 &= \sigma_n(p)h \times \left\{ \text{der Koef. von } f_{(x_{n+p})}^{(n+p)} \right\} \\
 &= \sigma_n(p)h \left\{ h^{n+p} \frac{\sigma_n^p(p) - \sigma_n^p(p)}{n! \cdot p!} \right\} = 0.
 \end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned}
 & \int_x^{x+h} d\xi_1 \int_x^{\xi_1} d\xi_2 \dots \int_x^{\xi_{n+p}} d\xi_{n+p+1} = \int_x^{x+h} d\xi_1 \int_x^{\xi_1} d\xi_2 \dots \int_x^{\xi_{n+p-1}} d\xi_{n+p} \left[\int_{x+\sigma_n(p)h}^{\xi_{n+p}} d\xi_{n+p+1} \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. + \int_x^{x+\sigma_n(p)h} d\xi_{n+p+1} \right] \\
 &= \int_x^{x+h} d\xi_1 \int_x^{\xi_1} d\xi_2 \dots \int_x^{\xi_{n+p-1}} d\xi_{n+p} \int_{x+\sigma_n(p)h}^{\xi_{n+p}} d\xi_{n+p+1},
 \end{aligned}$$

so dass es ganz egal ist ob man x_{n+p} als $x+\sigma_n(p)h$ ansieht oder ob man x_{n+p} als x ansieht.

Entsprechen die Faktoren $(\xi_{n+p+1} - x_{n+p})$ und $(\xi_{n+1} - x_n) \equiv \xi_{n+1} - (x + \sigma_n(p)h)$

$$> 0 \quad | \quad < 0$$

zueinander, so sieht man x_{n+p} als

$$x \quad | \quad x + \sigma_n(p)h$$

an, so dass das Produkt $(\xi_{n+1} - x_n)(\xi_{n+p+1} - x_{n+p})$ durchaus positiv bleibt, In übrigen Fällen bleibt das ganze Produkt positiv.

正 誤

頁	行	誤	正
481	13	$\{x, x_0, x_1, \dots, x_{n+p+1}\}$	$\{x, x_0, x_1, \dots, x_{n+p}\}$
482	4, 23, 26		
482	1	$\int_{x_0}^x d\xi_1 + \varphi''(x_2) \int_{x_0}^x \xi$	$\int_{x_0}^x d\xi_1 + \varphi''(x_2) \int_{x_0}^x$
483	13	$\varphi^{(n)}(\xi)$	$\lim \varphi^{(n)}(\xi)$
484	2	f^{n-1}	$f^{(n-1)}$
"	3	h_n	h^n
489	6	$\{\bar{x}, \bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n+p+1}\}$	$\{\bar{x}, \bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n+p}\}$
490	9	$\sqrt{\quad}$	$\sqrt[p]{\quad}$
"	13	σ_p^n	σ_n^p
"	20	(4) sich	(4)
"	21	$(\xi_{n+p} - x_n)$	$(\xi_{n+1} - x_n)$

(2) が (3) で正負号ヲ変ヘル様ニサヘ見ヘテ誤トシテ質問サレ攻撃サレル憂サヘアリマスカタ其ノ証明ノ方針ヲ略説サセテ預キマス。