OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

| | |
|---|---|
| Title | 多元環ノIdealノ最小公倍數，最大公約數，IV |
| Author(s) | 中山，正 |
| Citation | 全国紙上数学談話会. 1936，76，p. 16-21 |
| Version Type | VoR |
| URL | https://doi.org/10.18910/74257 |
| rights | |
| Note | |

*The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA*

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

# 334. 多元環ノIdealノ最小公倍數，最大公約數，IV.

中山　正（阪大）

§1. マヅ、前稿III，§2ニ証明ナシニ述ベタ主張

「$\mathfrak{O}_0+\mathfrak{O}\supseteq\mathfrak{O}_0+\bar{\mathfrak{O}}$ ナラ $\mathfrak{O}_0\cap\mathfrak{O}\subseteq\mathfrak{O}_0\cap\bar{\mathfrak{O}}$」ヲ証明スル(逆ハスデニ証明シタ)

ヤハリ *im Kleinen* デ考ヘテ，III，補助定理3ニヨリ

$$\mathfrak{O}_0=\sum\varepsilon_{ik}\mathfrak{O}_D,\quad \mathfrak{O}=\sum\varepsilon_{i,k}\mathfrak{O}_D\pi^{\rho_k-\rho_i}$$

トスル。タダシ $\rho_1\leqq\rho_2\leqq\cdots\cdots\leqq\rho_r$.

次ニ $\mathfrak{O}_0$ ヲ左-*Ordnung*ニ，$\bar{\mathfrak{O}}$ヲ右*Ordnung*ニモツ様ナ *gang* + *Ideal*（メトヘバ $\mathfrak{O}_0$，$\bar{\mathfrak{O}}$ ニ對スル *Distanzideal*）ノーツヲ $\alpha$ トスル．$\alpha$ ハトモカク

$$\alpha=\begin{pmatrix}\pi^{\nu_1}&a_{12}&\cdots\cdots&a_{1r}\\&\pi^{\nu_2}&\cdots\cdots&a_{2r}\\&&\ddots&\\0&&&\pi^{\nu_r}\end{pmatrix};\quad \nu_i\geqq 0,\ a_{ik}\in\mathfrak{O}_D$$

ナル形ノ $\alpha$ デ生ズル $\mathfrak{O}_0$ ノ左 *Ideal* ニナル、シカシテ $\alpha^{-1}\mathfrak{O}_0\alpha=\bar{\mathfrak{O}}$ デアル。シカルニ $\alpha^{-1}$ ハ

$$\alpha^{-1}=\begin{pmatrix}\pi^{-\nu_1}&e_{12}&\cdots\cdots&e_{1r}\\&\pi^{-\nu_2}&\cdots\cdots&e_{2r}\\&&\ddots&\\0&&&\pi^{-\nu_r}\end{pmatrix};\quad e_{i,k}\in\mathfrak{D}$$

ナル形デアッテ，コレニスベテノ $i\,k$ ニ對シテ

(1) $$0=\pi^{\nu_i}e_{ik}+a_{i,i+1}e_{i+1,k}+a_{i,i+2}e_{i+2,k}+\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots+a_{i,k}\pi^{-\nu_k}$$

デアル。而シテ $\alpha^{-1}\varepsilon_{ki}\alpha$ $(k>i)$ ヲ考ヘレバ，コノ行列

ノ $(i,i)$ ノ所ノ元ハ $e_{ik}\pi^{\nu_i}$ デアル。

然ルニ $\alpha^{-1}\varepsilon_{ki}\alpha \in \overline{\mathfrak{o}}$, 従ッテ $\in \mathfrak{o}_0+\overline{\mathfrak{o}}$ デアル、ヨッテ $\mathfrak{o}_0+\overline{\mathfrak{o}} \subseteqq \mathfrak{o}_0+\mathfrak{o}$ ナリトスレバ $\alpha^{-1}\varepsilon_{ki}\alpha \in \mathfrak{o}_0+\mathfrak{o}$. 然ラバ $\mathfrak{o}_0, \mathfrak{o}$ ノ形カラ明カナル如ク $= e_{ik}\pi^{\nu_i}$ ガ ganz デナケレバナラヌ:

(2) $\quad e_{ik}\pi^{\nu_i} \in \mathfrak{o}_D \qquad (k>i)$

コノ (1) ト (2) カラドノ $i$ ク $k$ ニツイテモ $\pi^{\nu_k} \mid d_{ik}$ ナルコトヲ証明シヨウ。ソレニハ先ヅ $k-i=1$, 即チ $k=i+1$ ノ時ニハ (1), (2) ハ $0=\pi^{\nu_i}e_{i,i+1}+d_{i,i+1}\pi^{-\nu_{i+1}}$, 及ビ $e_{i,i+1}\pi^{\nu_i} \in \mathfrak{o}_D$ 即チ $\pi^{\nu_i}e_{i,i+1} \in \mathfrak{o}_D$ トナリ, 従ッテ $d_{i,i+1}\pi^{-\nu_{i+1}}$ ガ ganz トナリ主張ガ成リ立ツ. 一般ノ場合ハ $k-i$ ノ大キサニヨル Induktion デヤレバ容易ニ証明サレル.

依ッテ $\pi^{\nu_k} \mid d_{ik}$, 従ッテ $\overline{\mathfrak{o}}$ ハ

$$\overline{\mathfrak{o}} = \sum \varepsilon_{ik}\mathfrak{o}_D\pi^{\nu_k-\nu_i}$$

トナル。然ルニ $\overline{\mathfrak{o}}$ モコノ形ニナホサレタ以上ハ考察ハ容易デアッテ直チニ $\mathfrak{o}_0 \cap \overline{\mathfrak{o}} \supseteqq \mathfrak{o}_0 \cap \mathfrak{o}$ ガ証明サレル. (III §2 ト同様)

§2. 以上デニツノ Maximalordnung ノ Durchschnitt, Summe ノ様子ガ大体ワカッタカラ今度ハニツノ gleichseitig ナ (Normal ナ) Ideal ニ移ラウ。ソレモ III, 補助定理3ヲ使ヘバ大シタ困難ハナイ. タトヘバ

定理　$\mathfrak{O}_0, \mathfrak{O}_1$ ヲ二ツノ Maximalordnung トシ，$\mathfrak{a}_0, \mathfrak{b}_1$ ヲソレゾレ $\mathfrak{O}_0, \mathfrak{O}_1$ ノ任意ノ zweiseitig ノ Ideal トスル。今 $\mathfrak{a}_0$ ト zusammengehörig ナ $\mathfrak{O}_1$ ノ Ideal ヲ $\mathfrak{a}_1$，$\mathfrak{b}_1$ ト zusammengehörig ナ $\mathfrak{O}_0$ ノ Ideal ヲ $\mathfrak{b}_0$ トスル，然ラバ $\mathfrak{a}_0 \cap \mathfrak{b}_1$ ノ左及ビ右 Ordnung ハソレゾレ $\mathfrak{b}_0 + \mathfrak{a}_1$ ノ右及ビ左 Ordnung ニ等シイ。

ナドー寸面白ク思ハレル。（コヽニ $\mathfrak{O}_0, \mathfrak{O}_1$ ノ zweiseitig ノ Ideal $\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1$ ガ zusammengehörig デアルトハ，左 Ordnung ガ $\mathfrak{O}_0$，右 Ordnung ガ $\mathfrak{O}_1$ ニナルヤウナ Ideal $\mathfrak{a}_{01}$ ニ對シテ $\mathfrak{a}_{01}^{-1}\mathfrak{a}_0\mathfrak{a}_{01} = \mathfrak{a}_1$ トナルコトデアル）。

精シク言ヘバ

定理　$\mathfrak{O}_0, \mathfrak{O}_1$ ノ zweiseitig ノ Ideal $\mathfrak{a}_0, \mathfrak{b}_1$ ニ於テ $(\mathfrak{a}_0)_\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0^\alpha$，$(\mathfrak{b}_1)_\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1^\beta$ トスル。タヾシ $\mathfrak{p}$ ハ Zentrum ノ任意ノ Primideal，$(\mathfrak{a}_0)_\mathfrak{p}$ 等ハ $\mathfrak{p}$-Komponent（$\mathfrak{p}$-Grenzmenge），$\mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_1$ ハ $\mathfrak{p}$ ヲ含ム $\mathfrak{O}_0, \mathfrak{O}_1$ ノ zweiseitig ノ素 Ideal トスル。今假リニ $\alpha \geqq \beta$ トナリトスレバ $\mathfrak{a}_0 \cap \mathfrak{b}_1$ ノ左 Ordnung ノ $\mathfrak{p}$-成分ハ $\mathfrak{O}_0 \cap \widetilde{\mathfrak{O}}$ ノソレニ等シイ。コヽニ $\widetilde{\mathfrak{O}}$ トハ $\mathfrak{O}_1$ ノ $\mathfrak{O}_0$ ニ對スル Distanzideal $\mathfrak{d}_{10}$ ト $\mathfrak{p}_0^{\alpha-\beta}$ ノ Durchschnitt ノ左 Ordnung トス。（右 Ordnung ニツイテハ，又ハ $\alpha \leqq \beta$ ノ場合ニハ適當ニ $0, 1, \alpha, \beta$ ヲカヘレバヨイ）。

マタ $\mathfrak{a}_0 + \mathfrak{b}_1$ ノ左 Ordnung ノ $\mathfrak{p}$-成分ハ $\mathfrak{O}_1 \cap \widetilde{\widetilde{\mathfrak{O}}}$ ノソレ

ニ等シイ、コンニ $\widetilde{\widetilde{\sigma}}$ ハ $\mathfrak{p}_1^{\alpha-\beta}\cap\mathcal{O}_{10}$ ノ右 Ordnung トス、
（書クトゴタゴタスルが事柄ハ簡単ナコトデアル）

（証明） マハリ im Kleinen デハル、$\mathcal{O}_0, \mathcal{O}_1$ ヲソレゾレ III, 補助定理3ノ $\mathcal{O}_0, \sigma$ ノ如ク表ハシテオク、シカシテ $\mathfrak{p}_0^t\cap\mathcal{O}_1$ （$t\geqq 0$）ヲ考ヘル．コレノ左 Ordnung ヲ $\mathcal{O}_L$（勿論一般ニハ Max-$\mathcal{O}$ デナイ）トスル、$\mathcal{O}_L\supseteq\mathcal{O}_0\cap\mathcal{O}_1$ ナルコトハ明カダカラ容易ニ $\mathcal{O}_L$ ハ

$$\mathcal{O}_L=\sum\varepsilon_{i,k}\mathcal{O}_D\pi^{a_{ik}}$$

ナル形ニカケル．シカルニ $\mathcal{O}_L$ ハモ・$(\mathfrak{p}_0^t\cap\mathcal{O}_1)\subseteq(\mathfrak{p}_0^t\cap\mathcal{O}_1)$ ナルモノ、全体ナルコトヲ考ヘレバ容易ニ

$$a_{ik}=\operatorname*{Max}_j\left(\operatorname{Max}(t,\rho_j-\rho_i)-\operatorname{Max}(t,\rho_j-\rho_k)\right)$$

トナル、而シテ $\rho_i'=\operatorname{Min}(\rho_r-t,\rho_i)$ トオケバ

$$a_{ik}=\operatorname{Max}(0,\rho_k'-\rho_i')$$

トナリ，$\mathcal{O}_L=\mathcal{O}_0\cap\widetilde{\sigma}$ トナル、但シ $\widetilde{\sigma}$ ハ

$$\widetilde{\sigma}=\sum\varepsilon_{ik}\mathcal{O}_D\pi^{\rho_k'-\rho_i'}$$

ナル Maximalordnung デアル．シカシテコノ $\widetilde{\sigma}$ ガ $\mathfrak{p}_0^t\cap\mathcal{O}_{10}$ ノ左 Ordnung ニナルノデアル（$\widetilde{\sigma}$ ハ其他，$\mathfrak{p}_1^{\rho_r-t}\cap\mathcal{O}_{01}$ ノ左 Ordnung，又ハ $\mathfrak{p}_0^{\rho_r-t}+\mathcal{O}_{01}$, $\mathfrak{p}_1^t+\mathcal{O}_{10}$ ノ右 Ordnung トシテ charakterise スルコトモ出来ル）

一般ノ $\mathfrak{p}_0^\alpha\cap\mathfrak{p}_1^\beta$ ハ容易ニ $\mathfrak{p}_0^{\alpha-\beta}\cap\mathcal{O}_1$ ノ考察ニ歸セラレル。

Summe ノ方モ大体同様デアル。

兎モ角 $\mathfrak{A}_0 \wedge \mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{A}_0 + \mathfrak{C}_1$ 等が $\mathfrak{O}_0 \wedge \mathfrak{O}_1$ ノ zweiseitig ノ Ideal ナルコトハ明カナノダガ，ソノ左，右 Ordnung（両者ハ必ズシモ一致シナイ）ハ上述ノ定理カラワカル如ク一般ニソレヨリモ大キクナル。而シテ $\mathfrak{A}_0 \wedge \mathfrak{C}_1$（又ハ $\mathfrak{A}_0 + \mathfrak{C}_1$）ノ $\mathfrak{p}$ 成分が丁度 $\mathfrak{O}_0 \wedge \mathfrak{O}_1$ ノソレヲ左及ビ右 Ordnung ニモツ gleichseitig + Ideal ナルノハ，$(\mathfrak{O}_0)_{\mathfrak{p}} = (\mathfrak{O}_1)_{\mathfrak{p}}$ ノトキヲ除ケバ $\alpha = \beta$ ノトキ，云ヒカヘレバ $(\mathfrak{A}_0)_{\mathfrak{p}}$ ト $(\mathfrak{C}_1)_{\mathfrak{p}}$ が zusammengehörig ナルトキニカギル。コノ場合ニ於テ $\mathfrak{A}_0 \wedge \mathfrak{C}_1$ が $\mathfrak{O}_0 \wedge \mathfrak{O}_1$ ノ Ideal 論ニ對シテモツ意味ニツイテハ次ノ篇ヲ考察シタイ。