



Title	多元環ノIdealノ最小公倍数, 最大公約数, IV
Author(s)	中山, 正
Citation	全国紙上数学談話会. 1936, 76, p. 16-21
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74257
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

334. 多元環, *Ideal*, 最小公倍数, 最大公約數, IV.

中山 正 (阪大)

§1. マヅ、前稿 III, §2 = 証明ナシ = 述べた主張

「 $\sigma_0 + \sigma \equiv \sigma_0 + \bar{\sigma}$ ナラ $\sigma_0 \wedge \sigma \subseteq \sigma_0 \wedge \bar{\sigma}$ 」ヲ証明スル(逆ハステ=証明シタ)

マハリ *im Kleinen* デ考ヘテ, III, 補助定理3 =ヨリ

$$\sigma_0 = \sum \varepsilon_{i,k} \sigma_D, \quad \sigma = \sum \varepsilon_{i,k} \sigma_D \pi^{p_k - p_i}$$

トスル。タビシ $p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_r$.

次 σ_0 ナ左-Ordnung =, $\bar{\sigma}$ ナ右Ordnung = ヲ
ツ様ナ ganz + Ideal (タトヘバ σ_0 , $\bar{\sigma}$ = 對スル Dis-
tanzideal) ノ一ツヲ α トスル。 α ハトモカク

$$\alpha = \begin{bmatrix} \pi^{\nu_1} d_{12} & \dots & d_{1r} \\ & \pi^{\nu_2} & \dots & d_{2r} \\ & & & \pi^{\nu_r} \\ 0 & & & \end{bmatrix}; \quad \nu_i \geq 0, d_{i,k} \in \sigma_D$$

ナル形, α デ生ガル σ_0 ノ左 Ideal = ナル、シカシテ

$\alpha^{-1} \sigma_0 \alpha = \bar{\sigma}$ デアル。シカル = α^{-1} ハ

$$\alpha^{-1} = \begin{bmatrix} \pi^{-\nu_1} e_{12} & \dots & e_{1r} \\ & \pi^{-\nu_2} & \dots & e_{2r} \\ & & & \pi^{-\nu_r} \\ 0 & & & \end{bmatrix}; \quad e_{i,k} \in \mathbb{D}$$

ナル形デアツテ, コノ = スベテノ $i < k$ = 對シテ

$$(1) \quad 0 = \pi^{\nu_i} e_{i,k} + d_{i,i+1} e_{i+1,k} + d_{i,i+2} e_{i+2,k} + \dots \\ \dots + d_{i,k} \pi^{-\nu_k}$$

デアアル。而シテ $\alpha^{-1} \varepsilon_{k,i} \alpha$ ($k > i$) ナ考ヘル =, コノ行列

$\iota(i, i)$ の所ノ元ハ $e_{ik} \pi^{\nu_i}$ デアル。

然ル $\alpha^{-1} \varepsilon_{ki} \alpha \in \bar{\sigma}$, 従ッテ $\in \sigma_0 + \bar{\sigma}$ デアル、ヨツテ $\sigma_0 + \bar{\sigma} \subseteq \sigma_0 + \sigma$ ナリトスレバ $\alpha^{-1} \varepsilon_{ki} \alpha \in \sigma_0 + \sigma$. 然ラバ $\sigma_0, \bar{\sigma}$ ノ形ヲ明カナル如ク $= e_{ik} \pi^{\nu_i}$ ガ *gang* デナケレバナラヌ:

$$(2) \quad e_{ik} \pi^{\nu_i} \in \sigma_D \quad (k > i)$$

コノ (1) ト (2) カラドノ $i < k$ = ツイテ $\in \pi^{\nu_k} | d_{ik}$ ナルコトヲ証明シヨウ。ソレハ先ヅ $k-i=1$, 即チ $k=i+1$ ノ時ニハ (1), (2) ハ $0 = \pi^{\nu_i} e_{i,i+1} + d_{i,i+1} \pi^{-\nu_{i+1}}$, 及ビ $e_{i,i+1} \pi^{\nu_i} \in \sigma_D$ 即チ $\pi^{\nu_i} e_{i,i+1} \in \sigma_D$ トナリ, 従ッテ $d_{i,i+1} \pi^{-\nu_{i+1}}$ ガ *gang* トナリ主張ガ成リ立ツ。一般ノ場合ハ $k-i$ ノ大キサニヨル *Induktion* デヤレバ容易ニ証明サレル。

依ッテ $\pi^{\nu_k} | d_{ik}$, 従ッテ $\bar{\sigma}$ ハ

$$\bar{\sigma} = \sum \varepsilon_{ik} \sigma_D \pi^{\nu_k - \nu_i}$$

トナル。然ル $\alpha^{-1} \varepsilon_{ki} \alpha \in \bar{\sigma}$ コノ形ニホサレタ以上ハ考察ハ容易デアッテ直チ $= \sigma_0 \cap \bar{\sigma} \subseteq \sigma_0 \cap \sigma$ ガ証明サレル。(III §2 ト同様)

§2. 以上デニツノ *Maximalordnung*, *Durchschnitt*, *Summe* ノ様子が大体ワカッタカラ今度ハニツノ *gleichseitig* + (*Normal* +) *Ideal* = 移ラウ。ソレモ III, 補助定理3ヲ使ヘバ大シタ困難ハナイ。タトヘバ

定理 σ_0, σ_1 ヲニツノ *Maximalordnung* トシ,
 $\alpha_0, \mathfrak{L}_1$ ヲソレゾレ σ_0, σ_1 任意ノ *zweiseitig* Ideal
 トスル。今 α_0 ト *zusammengehörig* + σ_1 Ideal
 ヲ $\alpha_1, \mathfrak{L}_1$ ト *zusammengehörig* + σ_0 Ideal ヲ $\mathfrak{L}_0$
 トスル。然ラバ $\alpha_0 \cap \mathfrak{L}_1$ ノ 左及ビ右 Ordnung ハソレゾレ
 $\mathfrak{L}_0 + \alpha_1$ ノ 右及ビ左 Ordnung = 等シイ。

ナド一寸面白ク思ハレル。(コノ σ_0, σ_1 ノ *zweiseitig*
 ノ Ideal α_0, α_1 が *zusammengehörig* デアルトハ,
 左 Ordnung が σ_0 , 右 Ordnung が σ_1 = ナルヤナ
 Ideal α_{01} = 對シテ $\alpha_{01}^{-1} \alpha_0 \alpha_{01} = \alpha_1$ トナルコトデア
 ル)。

精シク言ヘバ

定理 σ_0, σ_1 ノ *zweiseitig* Ideal $\alpha_0, \mathfrak{L}_1$ = 於
 テ $(\alpha_0)_{\mathfrak{F}} = \mathfrak{F}_0^{\alpha}$, $(\mathfrak{L}_1)_{\mathfrak{F}} = \mathfrak{F}_1^{\beta}$ トスル。タジシ $\mathfrak{F}$ ハ Zentrum
 ノ任意ノ Primideal, $(\alpha_0)_{\mathfrak{F}}$ 等ハ $\mathfrak{F}$ -Komponent ($\mathfrak{F}$ -
 Grenzmenge), $\mathfrak{F}_0, \mathfrak{F}_1$ ハ $\mathfrak{F}$ ヲヲル σ_0, σ_1 ノ *zweiseitig*
 ノ素 Ideal トスル。今假リ $\alpha \geq \beta$ トナリトスレバ $\alpha_0 \cap \mathfrak{L}_1$
 ノ左 Ordnung ノ $\mathfrak{F}$ -成分ハ $\sigma_0 \cap \tilde{\sigma}$ ノソレ = 等シイ。コ
 ノ $\tilde{\sigma}$ トハ σ_1 ノ σ_0 = 對スル *Distanzideal* $\mathfrak{D}_{10}$ ト
 $\mathfrak{F}_0^{\alpha-\beta}$ ノ Durchschnitt ノ左 Ordnung トス。(右
 Ordnung = ツイテハ, α ハ $\alpha \leq \beta$ ノ場合 = ハ適當 = 0, 1,
 α, β ヲカヘレバヨイ)。

マタ $\alpha_0 + \mathfrak{L}_1$ ノ左 Ordnung ノ $\mathfrak{F}$ -成分ハ $\sigma_1 \cap \tilde{\tilde{\sigma}}$ ノソレ

ニ等しい、 $\gamma = \tilde{\sigma} \wedge p_1^{\alpha-\beta} \wedge \mathcal{O}_{10}$ 、右 *Ordnung* トス。
(書クトゴタゴタスルが事柄ハ簡單ナコトデアル)

(証明) マハ、*im Kleinen* デアル。 σ_0, σ_1 ノソレ
アレ III, 補助定理 3, σ_0, σ_1 ノ如ク表ハシテオク。シカシテ
 $p_0^t \wedge \sigma_1$ ($t \geq 0$) ノ考ヘル。コレ、左 *Ordnung* σ_L
(勿論一般ニハ *Max- σ* デナイ) トスル。 $\sigma_L \geq \sigma_0 \wedge \sigma_1$ ナ
ルコトハ明カデカラ容易ニ σ_L ハ

$$\sigma_L = \sum \varepsilon_{i,k} \sigma_D \pi^{a_{ik}}$$

ナル形ニカケル。シカレニ σ_L ハ $\xi \cdot (p_0^t \wedge \sigma_1) \leq (p_0^t \wedge \sigma_1) + \xi$
ニ、全体ナルコトヲ考ヘレバ容易ニ

$$a_{ik} = \max_j (\max(t, p_j - p_i) - \max(t, p_j - p_k))$$

トナル、而レテ $p_i' = \min(p_r - t, p_i)$ トオケル

$$a_{ik} = \max(0, p_k' - p_i')$$

トナリ、 $\sigma_L = \sigma_0 \wedge \tilde{\sigma}$ トナル、但レ $\tilde{\sigma}$ ハ

$$\tilde{\sigma} = \sum \varepsilon_{i,k} \sigma_D \pi^{p_k' - p_i'}$$

ナル *Maximalordnung* デアル。シカシテコノ $\tilde{\sigma}$ ガ
 $p_0^t \wedge \mathcal{O}_{10}$ 、左 *Ordnung* ニナル、デアル ($\tilde{\sigma}$ ハ其他、
 $p_1^{p_r-t} \wedge \mathcal{O}_{01}$ 、左 *Ordnung*、又ハ $p_0^{p_r-t} + \mathcal{O}_{01}$ 、 $p_1^t + \mathcal{O}_{10}$
、右 *Ordnung* トシテ *characterise* スルコトモ出來
ル)

一般、 $p_0^\alpha \wedge p_1^\beta$ ハ容易ニ $p_0^{\alpha-\beta} \wedge \sigma_1$ 、考察ニ歸セラレ
ル。

Summe、方モ大体同様デアル。

$\alpha \in \alpha_0 \wedge \beta_1, \alpha_0 + \beta_1$ 等が $\sigma_0 \wedge \sigma_1$ の *zweiseitig*
 の *Ideal* ナルコトハ明カナノタガ、ソノ左、右 *Ordnung*
 (両者ハ必ずシモ一致シナイ) ハ上述ノ定理カラワカル如ク
 一般ニソレヨリモ大キクナル。而シテ $\alpha_0 \wedge \beta_1$ (又ハ $\alpha_0 + \beta_1$)
 ノ *Prüfung* が丁度 $\sigma_0 \wedge \sigma_1$ ノソレヲ左及ビ右 *Ordnung* =
 ヲ *gleichseitig* + *Ideal* = ナルノハ、 $(\sigma_0)_Z = (\sigma_1)_Z$
 ノトキヲ除ケバ $\alpha = \beta$ ノトキ、云ヒカヘレバ $(\alpha_0)_Z$ ト $(\beta_1)_Z$
 が *zusammengehörig* ナルトキニカヤル。コノ場合ニ
 於テ $\alpha_0 \wedge \beta_1$ が $\sigma_0 \wedge \sigma_1$ の *Ideal* 論ニ對シテモツ意味ニツ
 イテハ次ノ稿ヲ考察セタイ。