



Title	行列方程式二就テ
Author(s)	浅野, 啓三
Citation	全国紙上数学談話会. 1936, 77, p. 1-3
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74259
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

336. 行列方程式 = 就テ

浅野 啓 三 (阪大)

本紙第 74 号 (326) = 於テ, 行列方程式 $e^x = A = \text{ツ}$
 イテ論ジタガ, 今コレヲ一般ニシテ,

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \dots$$

ヲ與ヘテ Potenzreihe , A ヲ複素数体 = 於ケル n 次
 1 $Matrix$ トシテ, 行列方程式

$$f(x) = A$$

ヲ考察スル。

B ヲ任意ノ $Matrix$ トシ, ソノ $Normalform$ ヲ

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} B_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B_m \end{pmatrix}, \quad B_r = \begin{pmatrix} \overbrace{\omega_r}^{p_r} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 & \omega_r \end{pmatrix}$$

$$B_r = \omega_r E_r + F_r$$

$$E_r = \begin{pmatrix} \overbrace{1}^{p_r} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}, \quad F_r = \begin{pmatrix} \overbrace{0}^{p_r} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_r^{p_r} = 0$$

トスル。

$$P^{-1}f(B)P = f(P^{-1}BP) = \begin{pmatrix} f(B_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & f(B_m) \end{pmatrix}$$

$$f(B_r) = f(w_r E_r + F_r) = f(w_r) E_r + f'(w_r) F_r + \dots$$

$$\dots + \frac{f^{(p_r-1)}(w_r)}{(p_r-1)!} F_r^{p_r-1} = \begin{pmatrix} f(w_r) & & 0 \\ f'(w_r) & & \\ \vdots & & \\ \frac{f^{(p_r-1)}(w_r)}{(p_r-1)!} & f'(w_r) & f(w_r) \end{pmatrix}$$

勿論 $f(B)$ は converge スルモノトスル。(上ノ關係式
カラ直チニ余ルコトデアアルガ、 $f(B)$ が converge スル
タメ必要且ツ充分ノ條件ハ $f(z), f'(z), \dots, f^{(N)}(z)$ ($N =$
 $\text{Max}(p_r - 1)$) が converge スルコトデアアル。B, Eigen-
wert が $f(z)$ ノ收斂円内ニアレバ $f(B)$ ハ確カニ收斂ス
ル) $f'(w_r) \neq 0$ ナラバ第 14 号ノ 326 ニ於ケル如ク
 $x E_r - f(B_r)$ ノ Elementarteiler ハ $(x - f(w_r))^{p_r},$
 $1, \dots, 1$ ニナル。從ツテ次ノ定理が成立スル。

定理: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ノ與ヘラレタル Potenzreihe

トシ、Matrix B ノ Eigenwert w_r ハスベテ $f(z)$ ノ
收斂円内ニ在リ、 $f'(w_r) \neq 0$ トスル。 $x E - B$ ノ Element-
arteiler $\gamma (x - w_r)^{p_r}$ ($\gamma = 1, 2, \dots, m$) トスルニ、
 $x E - f(B)$ ノ Elementarteiler ハ $(x - f(w_r))^{p_r}$ ($\gamma =$
 $1, 2, \dots, m$) ナラヌ。

從ツテ之レカラ次ノ定理ヲ得ル。

定理: Matrix A , Eigenwert $\lambda_r =$ 對シテ
 $f(\omega_r) = \lambda_r, \quad f'(\omega_r) \neq 0$

トナル ω_r が存在スレバ $f(X) = A$ ハ解ヲ有スル。

証明: A , Elementarteiler $\gamma (x - \lambda_r)^{p_r} (r = 1, 2, \dots, m)$ トシ, 定理ニ於ケル如キ ω_r ヲトツテ $(x - \omega_r)^{p_r}$ ヲ Elementarteiler トスル Matrix

$$X_0 = \begin{pmatrix} B_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B_m \end{pmatrix}, \quad B_r = \begin{pmatrix} \overbrace{\omega_r \cdots \omega_r}^{p_r} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

ヲ作レバ $f(X_0)$, Elementarteiler が A ト一致スル。

故ニ $P^{-1} f(X_0) P = f(P^{-1} X_0 P) = A$ トナル P が存在スル。

即チ $f(X) = A$ ハ解ヲ有スル。

$$\text{特ニ } f(x) = e^x = \sum_0^{\infty} \frac{x^n}{n!} \text{ トスレバ, } f'(x) \neq 0 \text{ デア}$$

ルカラ A , Eigenwert λ_r が 0 デナケレバ, 即チ
 $\text{Det. } A \neq 0$ ナラバ $e^X = A$ が解ヲ有スル。

又 $f(x) = x^n$ トスレバ $\text{Det. } A \neq 0$, 即チ $\lambda_r \neq 0$ ナ
 ルトキ $\omega_r^n = \lambda_r, \quad f'(\omega_r) = n\omega_r^{n-1} \neq 0$ トナル ω_r がアル
 カラ $X^n = A$ ハ解ヲ有スル。