



Title	Metrisationノ一問題（Ⅱ）
Author(s)	角谷， 静夫
Citation	全国紙上数学談話会． 1936， 77， p. 9-15
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74261
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

338. Metrisation, 問題(II)

角 谷 静 夫 (阪大)

定理 II の証明

定理 II を証明スルハ次ノ定理 III を証明スルバ十分
デアレ。

定理 III. R_1 が metrisch, im kleinen kom-
pakt ナ Zusammenhangen デアツテ、 R_2 が
ソノ部分空間デ R_1 ニ於テ開チテ居レバ R_2 ノ任意ノ Metrik
ハ R_1 全体ヘ fort setzen スルコトが出来ル。

先ッ 定理 III カラ定理 II が得テレルコトヲ証明シヨ
ウ。

R_1 ノ Metrik が ρ_1 , R_2 ノ Metrik が ρ_2 ニヨツ
テ與ヘラレタトセヨ。

R_1 ヲ Zusammenhangen + 部分 ("Komponent")
ニ分ツ。

$$R_1 = \sum_{\alpha} R_{1,\alpha}$$

$R_{1,\alpha}$ は何れも R_1 に於いて同時に開かて開いた集合である。

且つ $\alpha \neq \beta$ ならば $R_{1,\alpha} \cdot R_{1,\beta} = 0$ 。 次=

$$R_{2,\alpha} = R_2 \cdot R_{1,\alpha}$$

$R_{2,\alpha}$ は空集合であるかを知る。 $R_{2,\alpha} \neq 0$ となる α を α' ⁴⁾, $R_{2,\alpha} = 0$ となる α'' を表はスコト=スレバ

$$R_2 = \sum_{\alpha'} R_{2,\alpha'}$$

である。更=

$$R'_1 = \sum_{\alpha'} R_{1,\alpha'}, \quad R''_1 = \sum_{\alpha''} R_{1,\alpha''}$$

トオク。

$$R_1 = R'_1 + R''_1$$

である。 定理 III = ヨリ $R_{2,\alpha'}$ = テ 定義サレタ

$p_{2,\alpha'}(x, y) = p_2(x, y)$ は $R_{1,\alpha'}$ 全体へ *fortsetzen* スルコトが出来ル。コレヲ $p_{2,\alpha'}^*(x, y)$ トセヨ。

R'_1 = 於ケル *Metrik* $p_2^{*1}(x, y)$ を次ノ如ク定義スル。

$$1^\circ. x, y \in R_{1,\alpha'} \text{ ならば } p_2^{*1}(x, y) = p_{2,\alpha'}^*(x, y)$$

$$2^\circ. x \in R_{1,\alpha'}, y \in R_{1,\beta'} \text{ ならば}$$

$$p_2^{*1}(x, y) = U, G \left\{ p_{2,\alpha}^*(x, z_{\alpha'}) + p_2(z_{\alpha'}, z_{\beta'}) \right. \\ z_{\alpha'} \in R_{2,\alpha'} \\ z_{\beta'} \in R_{2,\beta'}$$

4) $\beta' \in R_{2,\beta'} \neq 0$ となるトキ=用=ル。

$$+ \rho_{2, \beta'}^*(z_{\beta'}, y) \}$$

コノ定義ハ次ノ場合ニハ次ノ如ク簡單ナル形ニナル。

$$(a) \quad x \in R_{2, \alpha'}, y \in R_{2, \beta'} \quad \text{ナラバ} \quad \rho_2^{*'}(x, y) = \rho_2(x, y)$$

$$(b) \quad x \in R_{2, \alpha'}, y \in R_{1, \beta'} - R_{2, \beta'} \quad \text{ナラバ}$$

$$\rho_2^{*'}(x, y) = \cup, G \left\{ \rho_2(x, z_{\beta'}) + \rho_{2, \beta'}^*(z_{\beta'}, y) \right\}$$

$$z_{\beta'} \in R_{2, \beta'}$$

$$(c) \quad x \in R_{1, \alpha'} - R_{2, \alpha'}, y \in R_{2, \beta'} \quad \text{ナルトキモ同様。}$$

此ノ如ク定義サレタ $\rho_2^{*'}(x, y)$ ガ $R_2 =$ 於テ $\rho_2(x, y)$ ト一致スルコトハ (1°) 及ビ (2°)(a) ヨリ明カデアルカラ、
 $\rho_2^{*'}(x, y)$ ガ R_1' 全体ヘノ ρ_2 ノ Fortsetzung デアルコトヲ示スニハ

(I) $\rho_2^{*'}(x, y)$ ガ距離ノ三公準ヲ満足スルコト。

(II) R_1' デ考ヘテ $\rho_2^{*'}(x, y)$ ト $\rho_1(x, y)$ ガ topologisch äquivalent ナルコト。

ガ云ヘレバヨイ。コレヲハ容易デアルカラ省略スル。

次ニ $z' \in R_1'$, $z'' \in R_1''$ ヲ夫々任意ニエランデ

$$\rho_2^*(x, y) \text{ヲ}$$

$$1^\circ. \quad x, y \in R_1' \quad \text{ナルトキハ} \quad \rho_2^*(x, y) = \rho_2^{*'}(x, y)$$

$$2^\circ. \quad x, y \in R_1'' \quad \text{ナルトキハ} \quad \rho_2^*(x, y) = \rho_1(x, y)$$

$$3^\circ. \quad x \in R_1', y \in R_1'' \quad \text{ナルトキハ}$$

$$\rho_2^*(x, y) = \rho_2^*(y, x) = \rho_2^{*'}(x, z') + 1 + \rho_1(z', y)$$

トオク。(從ツテ $\rho_2^*(z', z'') = 1$) 斯ノ如ク定義サレタ

ρ_2^* ガ定理 IIニ於テ求メテキルモノデアルコトハ容易ニ

カル。(イツモノ様 = 條件(I), (II)ヲシラベレバヨイ)

定理IIIヲ証明スルタメニ次ノ定理IVヲ証明スル。

定理IV. *metrisch, im kleinen kompakt, zusammenhängend* + 空間 R ハ適當 = Metrik
ヲツケカヘレバ「有界集合ハスベテ R = 於イテ *kompakt*
デアル。(Bolzano-Weierstrassノ定理が成立スル)
空間」トナル。

定理IVノ証明 Alexandroffノ定理(紙上談話
會75号, 327参照) = ヨリ R ハ *separabel* デアルカ
ラ R = 一点 ξ ヲツケテ $R + \varepsilon$ が *kompakt*,
separabel シタガツテ *metrisch* = スルコトが出
來ル。

ユノ Metrik ヲ ρ トセヨ。 $a \in R$ ノ任意ノ一定点トシ R ノ
新シイ Metrik $\bar{\rho}$ ヲ

$$\bar{\rho}(x, y) = \left| \frac{\rho(a, x)}{\rho(\xi, x)} - \frac{\rho(a, y)}{\rho(\xi, y)} \right| + \rho(x, y)$$

= ヲツテ定義スル。

$\bar{\rho}(x, y)$ が距離ノ三公準ヲ満足スルコトハ容易ニ
ワカル。

又、 $\bar{\rho}(x, y) \geq \rho(x, y)$ デアルカラ $\bar{\rho}(x_0, y_n) \rightarrow 0$
ナルトキ $\rho(x_0, y_n) \rightarrow 0$

逆 = $\rho(x_0, y_n) \rightarrow 0$ ナルトキ

$$\left| \frac{\rho(a, x_0)}{\rho(\xi, x_0)} - \frac{\rho(a, y_n)}{\rho(\xi, y_n)} \right| \rightarrow 0$$

デアルカラ $\bar{\rho}$ ト ρ ハ $R = \tau$ *topologisch äquivalent* デアル。

$\bar{\rho}$ が ∞ ノ *Metrik* デアルコトハ $y_n \rightarrow \xi$ ナルトキ
($\rho(\xi, y_n) \rightarrow 0$ ナルトキ)

$$\bar{\rho}(x_0, y_n) \rightarrow \infty$$

ヨリヲカル。

定理 IV ヲ用ヒテ定理 III ヲ証明スルコト: R_1, R_2 ノ
Metrik が夫々 $\rho_1, \rho_2 =$ ヨリ映ヘラレタトセヨ。定理 IV
= ヨリ R_1 ノ *Metrik* ρ_1 ハ $\bar{S}(a, n)$ がスベテ *kompakt*
= ナル如ク定メラレテキルト考ヘルコトが出来ル。($a \in R_2$
= 属スル一定点トス。)

$$R_2 \cdot \bar{S}(a, n) = R_2^n \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

トオク。 R_2^n ハ $\bar{S}(a, n) = \tau$ 閉デテキルカラ, ソレ自身
kompakt, abgeschlossen デアル。故ニ $R_2' =$
 τ 定義サレタ $\rho_2' = \rho_2$ ハ $\bar{S}(a, 1)$ 全体ヘ *fortsetzen*
スルコトが出来ル。

コレヲ $\rho_2^{1*} = \tau$ 表ハス。一般ニ $\bar{S}(a, n) = \tau \rho_2^{n*}$ が定
義サレ。 $R_2^n = \tau \rho_2^{n*} = \rho_2$ デアルトキ $\bar{S}(a, n) + R_2^{n+1}$
= 於テ $\bar{\rho}_2^{n*}$ ヲ次ノ如ク定義スル。

$$1^\circ. x, y \in \bar{S}(a, n) \text{ ナルトキ } \bar{\rho}_2^{n*} = \rho_2^{n*}$$

$$2^\circ. x, y \in R_2^{n+1} - R_2^n \text{ ナルトキ } \bar{\rho}_2^{n*} = \rho_2$$

$$3^0. \quad x \in \bar{S}(a, n), \quad y \in R_2^{n+1} - R_2^n$$

ナルトキ

$$\bar{p}_2^{n*}(y, x) = \bar{p}_2^{n*}(x, y)$$

$$= \text{u. G. } \left\{ p_2^{n*}(x, z) \right. \\ \left. z \in R_2^n \right.$$

$$\left. + p_2(z, y) \right\}.$$

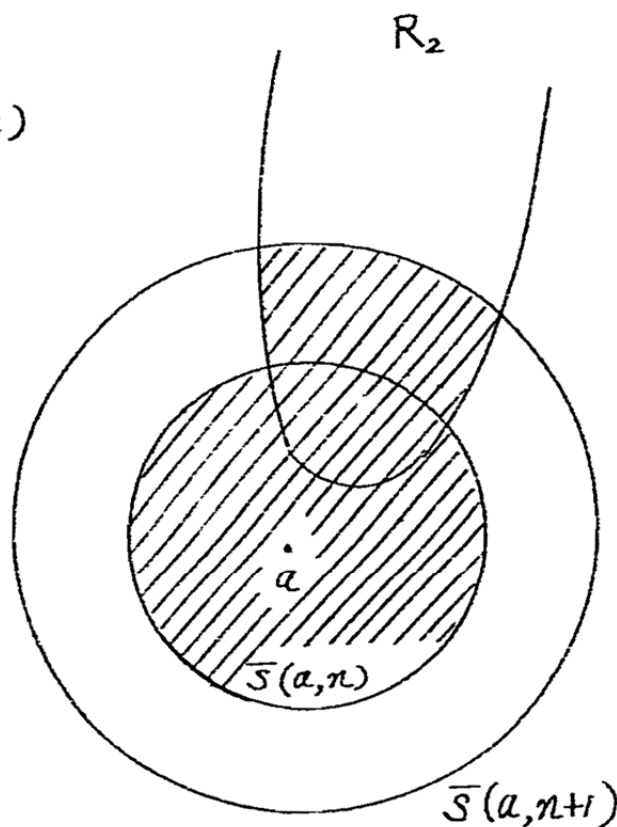
$$(\text{故} = x \in R_2^n,$$

$$y \in R_2^{n+1} - R_2^n \text{ ナ}$$

ルトキハ

$$\bar{p}_2^{n*}(x, y) = \bar{p}_2^{n*}(y, x)$$

$$= p_2(x, y))$$



此ノ如ク定義サレタ $\bar{p}_2^{n*}(x, y)$ が距離ノ三公準ヲ満たシ
且ツ $R_2^{n+1} = \tau \wedge p_2$ ト一致シ $\bar{S}(a, n) = \tau \wedge p_2^{n*}$ ト一
致スルコトハ容易ニ示カル。シカモ $\bar{p}_2^{n*} \wedge R_1 = \tau \wedge p_1$ ト
topologisch äquivalent ナル。

次ニ $\bar{S}(a, n) + R_2^n \wedge \bar{S}(a, n+1) = \text{於テ } \textit{kompakt},$
abgeschlossen ナルカラ定理 I = ヨリ $\bar{S}(a, n) + R_2^n$
ニテ定義サレタ $\bar{p}_2^{n*}(x, y)$ ハ $\bar{S}(a, n+1)$ 全体ヘ *fort-*
setzen シテコレガ p_1 ト *topologisch äquivalent*
ニナルヲ示スルコトが出来ル。

$$p_2^*(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_2^{n*}(x, y) \quad \wedge \quad x, y \in R_1 \text{ ナル任意ノ}$$

$x, y = \text{對シテ存在シテ, コレハ容易ニ示サレル如ク所要ノ}$

$P_2(x, y)$, Fortsetzung が 7 11。

——(証明終)——