



Title	Kompaktナ連續群ガSeparabelナルタメノ條件
Author(s)	小松, 醇郎; 角谷, 静夫
Citation	全国紙上数学談話会. 1936, 78, p. 4-12
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74269
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

346. Kompakt + 連続群が Separabel + ルタメノ 条件

小松 醇郎, 角谷 静夫 (阪大)

kompakt + topologisch kontinuierliche
Gruppe G を研究スル = 際ニテ G が Separabel
(Hausdorff の意味ヲ) + ルコトハ屢々假定サレテキル。
次ニ G が如何ナル条件ノ下ニ Separabel = ナルカヲ調べ
テ見ヨウ。

定理 I kompakt + topologische konti-
nuierliche Gruppe G が erstes Abzählbar-
keitsaxiom を満足スルハ zweites Abzählbarkeits-
axiom を満足スル。

証明: G の Einheitselement e , 近傍系ヲ

$$U_1 \supset U_2 \supset U_3 \supset \dots \supset U_n \supset \dots \ni e \dots \dots \dots (1)$$

トセヨ。 (G ハ e = 於テ erstes Abzählbarkeitsaxiom
ヲ満足シテキルカラ、コレハ可附番網ヲ間ニテ)。

$$U_{n_1} = U_1 \quad (\text{即チ } n_1 = 1)$$

トオキ、一般ニ $U_{n_{k-1}}$ が定マツタトキ U_n ($n > n_{k-1}$) ノウ
チニテ始メテ

$$U_n^2 \subset U_{n_{k-1}}$$

トナルニテ U_{n_k} トオク。 ($k = 2, 3, \dots$)

$$U_{n_1} \supset U_{n_2} \supset \dots \supset U_{n_k} \supset \dots \ni e \dots \dots \dots (2)$$

ハ (1) ト *äquivalent* ナ e ノ近傍系デアール。次＝

$$V_k = V_{n_k}^{-1} \times V_{n_k} \quad k=1, 2, \dots \quad 1)$$

トオケバ明カ＝

$$V_k^{-1} = V_k, \quad V_k^2 \subset V_{k-1}$$

デアアリ

$$V_1 \supset V_2 \supset \dots \supset V_k \supset \dots \ni e \dots \dots \dots (3)$$

ハ又 (1), (2) ト *äquivalent* ナ e ノ近傍系デアール。

先ツコノ各々ノ V_k ＝ 對シテ 有限個ノ 点ヨリナル集合

$$E_k = \{a_1^k, a_2^k, \dots, a_{m_k}^k\}$$

ヲ 作ツテ

$$G = V_k \cdot E_k \equiv \sum_{i=1}^{m_k} V_k \cdot a_i^k \quad 2) \dots \dots \dots (4)$$

が成立スルヌウ＝スルコトが出来ルコトヲ示サシ。コノヌメ
＝

$$a_1^k = e$$

トオキ, 一般ニ $a_i^k (i=1, 2, \dots, m-1)$ が定マツタトキ
若シ

$$G - \sum_{i=1}^{m-1} V_k \cdot a_i^k \neq 0 \quad \dots \dots \dots (5)$$

1) $A \times B \cap A, B$, Durchschnitt ヲ表ハス。

2) $V \cdot a$ ハ a ノ左側ニ V , 各 Element ヲ乘シテ得ラレル Element 全体ノ集合。

$V \cdot E$ ハ $b \in V, a \in E$ ナルアラエル $b \cdot a$ ＝ 對スル $b \cdot a$ ノ集合。

デアレバコレ=属スル任意ノ一ツ, Elementヲ取ツテ
 a_m^k トオク, (5)ノ左辺ガ空集合デアレバ $E_k = \{a_1^k, a_2^k, \dots, a_{m-1}^k\}$ トオケル (4)ガ成立スルノデアルカテ、此ノ様
 ナ方法デ a_m^k ($m=1, 2, \dots$)ガ無限=多ク求メラレル
 ト云フ假定ガ矛盾ヲ含ムコトヲ示セバヨイ。

若シ a_m^k ($m=1, 2, \dots$)ガ無限=存在スレバ G ハ
 kompakt デアルカラ $\{a_m^k\}$ ハ少クトモ一ツ集積点ヲモツ。
 コレヲ a_0^k トセヨ。

$V_{k+1} \cdot a_0^k \supset a_0^k$, 近傍デアアルカラコノ内部=ハ $\{a_m^k\}$ ノ
 点ガ少クトモ二ツ存在スル。コレヲ a_p^k, a_q^k ($p < q$) トセ
 ヨ。

$$a_p^k \in V_{k+1} \cdot a_0^k, \dots \dots \dots (6)$$

$$a_q^k \in V_{k+1} \cdot a_0^k \dots \dots \dots (7)$$

$V_{k+1}^{-1} = V_{k+1}$, ナルコトヲ用フレバ (6)ヨリ

$$a_0^k \in V_{k+1} \cdot a_p^k$$

コレト (7)トヨリ

$$a_q^k \in V_{k+1}^2 \cdot a_p^k \subset V_k \cdot a_p^k$$

コレハ a_q^k ガ $\sum_{i=1}^{q-1} V_k \cdot a_i^k$ = 属シナイト云フ假定=反スル。

此ノ如クシテ E_k ($k=1, 2, \dots$)ガ存在スルコトガ分
 ツタ。

次ニ我々ハ

$$W_{k,i} = V_k \cdot a_i^k; \quad i=1, 2, \dots, m_k; \quad k=1, 2, \dots \quad (8)$$

トオキ、コレが G の Basis トナルコトヲ証明シヨウ。即チ G の各点 x = 對シテ、 x ヲ内点トシテ含ム如キスベテノ W ヲ x ノ近傍系ト考ヘルトキハ、コレが始メノ近傍系（各点 x ノ近傍系ハ $U_n \cdot x$ ($n=1, 2, \dots$) = ヨツテ與ヘラレタト考ヘルコトが出来ル！）ト äquivalent ナルコトヲ証明シヨウ。

W ハスベテ offen デアルオラ Äquivalenz ヲ証明スルタメ = ハ任意 = G ノ点 x トソノ近傍 $U_{n_0} \cdot x$ トが與ヘラレタトキ

$$x \in W \subset U_{n_0} \cdot x \text{ ----- (9)}$$

ヲ満足スル W が存在ナルコトヲ示セバ十分デアル。

$n_k \geq n_0$ ナル n_k ヲ取り $V_{k+1} \cdot a_i^{k+1}$ ($i=1, 2, \dots, m_{k+1}$) ヲ考ヘレバ

$$G = \sum_{i=1}^{m_{k+1}} V_{k+1} \cdot a_i^{k+1}$$

デアルカラ少クトモ一ツノ $i = i(x, k+1)$ = 對シテ

$$x \in V_{k+1} \cdot a_i^{k+1} \text{ ----- (10)}$$

$$V_{k+1}^{-1} = V_{k+1} \text{ ナルコトヨリ}$$

$$a_i^{k+1} \in V_{k+1} \cdot x \text{ ----- (11)}$$

ヨツテ (10), (11) ヲヨリ

$$x \in V_{k+1} \cdot a_i^{k+1} \subset V_{k+1}^2 \cdot x \subset V_k \cdot x \subset U_{n_k} x \subset U_{n_0} \cdot x$$

故 $W = \overline{W} = \bigcap_{k+1, i} W_{k+1, i} = \bigcap_{k+1} \bigcap_i a_i^{k+1}$ ト取レバ (9) が成立スル。コ

ノ W ハ タシカ $= (8)$ ノ 形 デ (8) ノ 形 ノ W ハ 明カ $=$ 可附番個
デアアルカラ 定理 I ノ 証明ハ 完結スル。

定理 II. *kompaht + topologische kon-*
tinuierliche Gruppe G が 任意 $=$ 小サイ *zyklische*
Untergruppe $\neq$ 含マナイヲラバ G ハ *erste Abzähl-*
barkeitsaxiom (従ッテ 定理 I $=$ ヨリ *Zweites Abzähl-*
barkeitsaxiom) $\neq$ 満足スル。

注意: 定理ノ 始メノ 部分ハ G が *im kleinen kompaht*
デアアルトキ $=$ 成立スル。

G が 任意 $=$ 小サイ *zyklische Gruppe* $\neq$ 含ムト云フ
ノハ *Einheitselement* , 任意ノ 近傍 $U =$ 對シテ $a \neq e$
ナル *Element* a が 定マツテ

$$a^n \in U, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

トナルコトデアアル。

コノ 定理ヨリ、次ノコトがヲカル。

系. 若シ G が *kompaht* デアッテ *separabel* デナ
イヲラバ *Einheit* e , 任意ノ 近傍 $U =$ 對シテ 少クトモ一
ツ $a (a \neq e)$ が 定マリ

$$a^n \in U \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

トナル。

實際 *kompaht* デ *separabel* デナイ *topologische*

Gruppe ハ存在シテ、ソレハ任意 = 小サイ *Zyklische Gruppe* ヲ持ッテキル。³⁾ シカシ *kompakt, separabel* デアツテ、コノ性質ヲ持ッテキル空間ニ存在スル。⁴⁾

故ニ定理 II ノ條件ハ *komakte Gruppe* が *separabel* デアルタメニ十分デハアルが必ずしも必要デハナイ。

定理 II ノ証明: 假定ニヨリ *Einheitselement* e ノ適當ニ近傍 U_0 ヲトレバ U_0 ニ属スル任意ノ $a (a \neq e)$ ニ對シテ $n = n(a)$ が定マツテ (n ハ正又ハ負ノ整数)

$$a^n \in U_0$$

トナル。 *Einheitselement* ノ近傍 $U_k (k=1, 2, \dots)$ ヲ

$$U_k^{-1} = U_k, U_k^2 \subset U_{k-1} \dots\dots\dots (12)$$

ナル如ク取ル。スルト明カニ

$$\overline{U_k} \subset U_{k-1} \dots\dots\dots (13)$$

デアル。カクシテ得ラレタ

$$U_0 \supset U_1 \supset U_2 \supset \dots\dots \supset U_k \supset \dots\dots \ni e \dots\dots\dots (14)$$

3) *Tychonoff* (M. A. 102), *Alexander* (Annals of Math.)

等ニヨツテ考ヘラレタ空間ハソノ一例。コレハ *bikompekt* デモアル。

4) *Pontrjagin* (Annals of Math. 35) が考ヘタ *character group* ハソノ一例。

5) コノコトヨリ *topologische kontinuierliche Gruppe* が常ニ *regulär* デアルコトガワカル。

が e の近傍系ナルコトヲ証明シヨウ。 U_k ハ何レモ
offen デアルカラ、コノタメニハ *Einheit* ; 任意ノ近
 傍 $V = \text{對シテ十分大キク } k = k(V) \text{ ヲトレバ}$

$$U_k \subset V \text{ ----- (15)}$$

トナルコトヲ示セバヨイ。若シ (15) が如何ナル $k = \text{對シテモ}$
 成立シナイナラバ

$$a_k \in U_k, \quad a_k \notin V \text{ ----- (16)}$$

ナル $\{a_k\}$ ($k=1, 2, 3, \dots$) が存在スル。 $\{a_k\}$ ノ
 集積点ノ一ツヲ a_0 トスレバ (14), (16) ヨリ

$$a_0 \in \overline{U_k} \quad (k=0, 1, 2, \dots) \text{ ----- (17)}$$

$$a_0 \notin V \text{ ----- (18)}$$

(18) ヨリ $a_0 \neq e$ ヲ得ル。又 (17), (13) ヨリ

$$a_0 \in U_{k-1}$$

デアルカラ (12) ヨリ

$$a_0^n \in U_0 \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 2^{k-1}$$

k ハ任意デアルカラ、コレハ $U_0 = \text{對スル 假定} = \text{矛盾ス}$
 $\checkmark$ 。⁶⁾

$$6) \quad P = \prod_{k=1}^{\infty} \overline{U_k} \text{ トオケバ } P \text{ ハ閉集合デ } P \subset \prod_{k=1}^{\infty} U_{k-1} \subset \prod_{k=1}^{\infty} U_k \subset P$$

$$\text{ヨリ } P = \prod_{k=1}^{\infty} U_k \text{ トナル。コレヨリ } P^2 = P, \quad P^{-1} = P \text{ ナルコトハ容}$$

易ニ示サレル。

即チ P ハ G ノ *abgeschlossene Untergruppe* デ $a_0 \in P$,
 $a_0 \neq e$ ヨリ P が *trivial* ナ *Untergruppe* デナイコトガワカル。

P.S. J. von Neumann, 論文 (on complete topological spaces) を見マシタテ 定理 I ト同様ノコトヲ linear space デマツテアリマシタ。

更ニ J. von Neumann ノ考ヘカヌニヨレバ次ノ定理が成立スル。

定理 III. kompakt + topologische kontinuierliche Gruppe G が erstes Abzählbarkeitsaxiom (従ッテ zweites abzählbarkeitsaxiom) を満足スルタメニ必要且ツ十分な条件ハ G ノ Einheit e ノ可附番個ノ近傍 (コレハ必ずシモ e ノ近傍系デアル必要ハナイ!) $U_n (n=1, 2, \dots)$ が存在シテ

$$\prod_{n=1}^{\infty} U_n = e \text{ ----- (19)}$$

トナルコトデアル。

証明: 必要ナコトハ明カデアルカラ十分ナコトヲ証明スル。

Einheit ノ近傍 $V_n (n=1, 2, \dots)$ を

$$V_n^2 \subset U_n \text{ ----- (20)}$$

ナル如クトリ

$$\left. \begin{aligned} W_1 &= V_1, & W_2 &= V_1 \times V_2, \dots \\ W_n &= V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n, \dots \end{aligned} \right\} \text{ ----- (21)}$$

トオク。

$W_n (n=1, 2, \dots)$ が Einheit e ノ近傍系デア

ルコトヲ証明シヨウ。各々ノ W_n ハ *offen* デアルカラ、
 コノタメニハ任意ノ開集合 U :

$$e \in U$$

ニ對シテ $n = n(U)$ ヲ十分大キクトレバ

$$e \in W_n \subset U \text{ ----- (22)}$$

トナルコトヲ示セバヨイ。實際モシコレが成立シナイナラ
 ば

$$a_n \in W_n, \quad a_n \notin U \text{ ----- (23)}$$

ナル $\{a_n\}$ ($n=1, 2, \dots$) が存在スル。 $\{a_n\}$ ノ集積点ノ
 一ツヲ a_0 トスレバ (23) ヨリ

$$a_0 \in W_n \text{ ----- (24)}$$

$$a_0 \notin U \text{ ----- (25)}$$

シカレニ (21), (20) ヨリ

$$\overline{W_n} \subset \overline{V_n} \subset U_n$$

デアルカラ (24) ハ

$$a_0 \in U_n \quad n=1, 2, \dots$$

トナリ (19) ト組合ハセレバ

$$a_0 = e$$

トナル。然レニ之レハ (25) ニ矛盾スル。ヨツテ (22) がア
 ル $n = n(U)$ ニ對シテ成立シナケレバナラナイ。