



|              |                                                                             |
|--------------|-----------------------------------------------------------------------------|
| Title        | 函数方程式二就テ, VI                                                                |
| Author(s)    | 福原, 満洲雄                                                                     |
| Citation     | 全国紙上数学談話会. 1936, 78, p. 22-27                                               |
| Version Type | VoR                                                                         |
| URL          | <a href="https://doi.org/10.18910/74274">https://doi.org/10.18910/74274</a> |
| rights       |                                                                             |
| Note         |                                                                             |

*The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

## 351. 函数方程式 = 就テ, VI

福原 満洲 雄 (北大)

函数方程式<sup>1)</sup>ヲ一般的ニ論ズルニハ、ドウシテモ *Fredholm* ノ積分方程式<sup>2)</sup>ノ理論ヲ完全ニ抽象化シテ置クコトが重要デアル。

ソレガ已ニ満足ナ程度ニ出来テ居ル (南雲氏, 積分方程式ノ抽象的考察 = 就イテ, 参照. 本紙ヲ通シテ種々未知ノ事柄ニツイテ教ヘラレル所が多イノハ杜合せマス)、併シソノ先ヘ進マツトスルニハ此レ等ノ結果ヲ自カノ力デ整理シ, 自カノモノトシテカラデナイト, 借り物デハ自由ニ使ヒコナセナイ、ソレデ蛇足ノヤウデハマルガ一先ツ今迄ノ結果ヲマトメテ置キタイト思フ。 *Riesz* ノ論文 (*Acta Math.* 1918) ト比較對照ノ便宜上ソノ定理番号ハ [ ] ノ中ノ数字デ表ハスコトニシタ。

§1. 本論 = 入レ前 = コレカラ使フ記号 = ツイテ述ベテ置ク。

$E$  ハ完備シタ線狀  $D$  空間,  $F(X)$  ハ  $E$  デ定義サレタ完全連続ナ (*vollstetig*) 一次函数

$$(1) \quad \Phi(X) \equiv X - F(X) = 0$$

ヲ満足スル  $X$  ノ集合ヲ  $M$ ,

$$(2) \quad \Phi(X) \equiv X - F(X) = \alpha$$

ガ解ヲ持ツ  $X$  ノ集合ヲ  $N$ , モット一般ニ

$$(3) \quad \Phi^n(X) \equiv X - F_n(X) = 0$$

ヲ満足スル  $X$  ノ集合ヲ  $M_n$ ,

$$(4) \quad \Phi^n(X) \equiv X - F_n(X) = x$$

ガ解ヲ持ツ  $x$  ノ集合ヲ  $N_n$  トスル.  $\Phi^0(X)$ ,  $\Phi'(X)$  ハ夫々  $X$ ,  $\Phi(X)$  ヲ表ハスモノトスレバ  $M_1 = M$ ,  $N_1 = N$ ,  $M_0$  ハ  $0$  ガケカラ成ル集合,  $N_0 = E$  デアル.

ニツノ集合  $A, B$  ガアルトキ  $A+B$  デ  $A$  ノ点ト  $B$  ノ点ノ和トシテ表ハサレル集合ヲ,  $\lambda A$  ( $\lambda$  ハ実数) デ  $\lambda$  ト  $A$  ノ点ノ積トシテ表ハサレル集合ヲ,  $A, B$  ノ和集合, 積集合ハソレゾレ  $A \cup B$ ,  $A \cap B$  デ表ハスコト=スル. 又  $B$  ガ一点  $x$  ガケカラ成ル場合=ハ  $A+B$  ノ代リ=  $A(x)$  ト書ク.  $A$  ガ一次閉集合ナレバ  $A(x) + A(y) = A(x+y)$ ,  $\lambda A(x) = A(\lambda x)$  デ, 且ツ

$$\|A(x)\| = \sup_{X \in A(x)} \|X\|$$

= 依ッテ  $\|A(x)\|$  ヲ定義シヌトキ  $A(x)$  ノ全体ガ完備シタ線状  $D$  空間トナル. コレヲ  $E/A$  デ表ハシ商空間ト名ヅケル(功カ氏, 抽象空間論, 197頁)

§2. 定理1 [1] 「 $M$  ハ有限ナ次元ヲ持ツ一次空間デアル」

$M$  ガ閉ガテキルコトハ  $F(X)$  ノ連続性ノ結果デアル.  $M$  ガ有限ナ次元ヲ持ツコトハ  $M = F(M)$  デアルカラ Riesz ノ定理ノ結果デアル,

注意:  $M$  が有限次元ヲ持ツカラ  $\|M(x)\| = \|x\|$  トナル  
 ヌヲ  $x$  が  $M(x)$  ノ中ニ存在スル。

定理2〔5〕 「 $N$  ハ一次閉集合デアアル」

$x_j \in N$ ,  $x_j \rightarrow x$  ナラバ  $\Phi(x_j) = x_j$ ,  $\|x_j\| = \|M(x_j)\|$   
 $(= \rho_j)$  ナル  $x_j$  が存在スル。  $\{x_j\}$  が有界ナラバ初メカラ  
 適當ナ部分列ヲ取ルコトニヨリ  $F(x_j) \rightarrow Y$  ト假定スルコト  
 が出來ル。

ソノ時  $x_j \rightarrow Y+x$  トナルカラ  $x = Y+x$  ト置ケバ  
 $\Phi(x) = x$  即チ  $x \in N$  ヲ得ル。  $\{x_j\}$  が有界デナケレ  
 バ初メカラ適當ナ部分列ヲ取ルコトニヨリ  $\rho_j \rightarrow \infty$  ト假定  
 スルコトが出來ル。

$x_j = \rho_j y_j$  ト置ケバ  $\|y_j\| = \|M(y_j)\| = 1$  トナル。  
 $\{y_j\}$  ハ有界デアアルカラ  $F(y_j) \rightarrow Y$  ト假定シテヨイ。  
 $x_j / \rho_j \rightarrow 0$  デアルカラ  $y_j \rightarrow Y$  トナリ  $\Phi(Y) = 0$ ,  
 $\|M(Y)\| = 1$  ヲ得ル。従ツテ  $\Phi(x) = 0$  が  $M$  屬シナイ  $Y$  デ  
 満足サレルコトニナリ矛盾デアアル。

定理3〔2〕 「 $M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_\mu = M_{\mu+1} = \dots$   
 トナルヌウナ  $\mu$  が存在スル」

定理4〔6〕 「 $N_0 \subset N_1 \subset \dots \subset N_\nu = N_{\nu+1} = \dots$   
 トナルヌウナ  $\nu$  が存在スル」

例ヘバ定理3ハ次ノヌウニシテ証明サレル。

$M_n \subseteq M_{n+1}$  デアルコト及ビ  $M_{n-1} = M_n$  ナ  
 ラバ  $M_n = M_{n+1}$  トナルコトハ容易ニ分ル。ソコテ總テノ

$n = \infty$  まで  $M_n \subset M_{n+1}$  が成立スルと假定スル。  $M_{n+1}$  ノ  
 中カラ  $\|M_n(X_{n+1})\| = 1$ ,  $1 \leq \|X_{n+1}\| \leq 2$  ヲ満足スル  
 $X_{n+1}$  ヲ取り,  $Y_n = F(X_n)$  ト置ク。  $\{Y_n\}$  ハ緊ツテキ  
 ル (Compact) カラ收斂ナ部分列ヲ含ム。 一方ニ於イテ  
 $Y_{n+p} - Y_n = X_{n+p} - X_n$  ( $p > 0$ ) ト置ケバ  
 $X = X_n + \sum (X_{n+p} - X_n) \in M_{n+p-1}$  ヲ得ルカラ  
 $\|Y_{n+p} - Y_n\| \geq 1$  トナリ  $\{Y_n\}$  が收斂ナ部分列ヲ含ムコ  
 トハ出来ナイ。 コレハ矛盾デアアル。

定理 5 (3) 「(2) が總テノ  $X = \infty$  まで解ヲ持ツバ (1) ヲ  
 満足スル  $X$  ハ  $0 = \lim$ 」

定理 6 「(1) ヲ満足スル  $X$  が  $0 = \lim$  ナラバ (2) ハ總  
 テノ  $X = \infty$  まで解ヲ持ツ」

定理 5 ハ定理 3 カラ, 定理 6 ハ定理 4 カラ導カレル。

例ヘバ定理 5 ハ次ノヤウニシテ証明サレル。

(1) が  $0$  デナイ解  $X_0$  ヲ持ツト假定スル。 一般ニ  $X_{n-1}$   
 が定義サレタトキ  $\Phi(X) = X_{n-1}$  ヲ満足スル  $X$  ノ一ツヲ  
 $X_n$  トスル。  $\Phi^n(X_n) = X_0 \neq 0$ ,  $\Phi^{n+1}(X_n) = \Phi(X_0) = 0$   
 デアルカラ  $M_{n+1}$  ハ  $M_n =$  属シナイ点  $X_n$  ヲ含ム。 コレハ  
 定理 3 ニ矛盾スル。

定理 7 「 $n > 0$  ナル時  $M_n \cap N_n$  が  $0$  デナイ点ヲ含メ  
 $\therefore M_n \subset M_{n+1}$ ,  $N_n \supset N_{n+1}$  デアル」

定理 8 「 $n > 0$  ナル時  $M_n \cap N_n$  が  $0$  デケヲ含ムナラ  
 $\therefore M_n = M_{n+1}$ ,  $N_n = N_{n+1}$  デアル」

例へば定理 7 ハ次ノヤウニシテ証明サレル。

$\Phi^n(N_n) = N_{2n} \subseteq N_n$  デアルカラ (3), (4) ヲ  $N_n =$   
於ケル方程式ト考ヘテヨイ。ソノトキ (4) が 0 デナイ  $X$  デ  
満足サレルカラ  $N_{2n} \subset N_n$  従ツテ  $N_{n+1} \subset N_n$  ヲ得ル。  
又  $M_n \cap N_n =$  属スル 0 デナイ点  $x$  ヲ取レバ  $\Phi^n(x) = 0$   
且ツ  $\Phi^n(X) = x$  ヲ満足スル  $X$  が存在スル。  $\Phi^{2n}(x) = \Phi^n(x) = 0$   
デアルカラ  $X \wedge M_{2n} =$  属シ  $M_n =$  属シナイ、即チ  $M_n \subset M_{2n}$   
従ツテ  $M_n \subset M_{n+1}$  ヲ得ル。

定理 3 —  $\delta$  カラ

定理 9 (6). 「 $\mu = \nu$ 」

$M_n$  が有限次元ヲ持ツカラ  $M_n + N_n$  モ一次閉集合  
デアル。  $M_n \cap N_n$  ノ代リ  $= M_n + N_n$  ヲ考ヘテモ 定理  
9 = 違スル。即チ定理 7,  $\delta$  ヲ使ハズニ次ノ二定理ヲ得ル。

定理 10. 「 $n > 0$  ナル時  $E \supset M_n + N_n$  ナラバ

$M_n \subset M_{n+1}$ ,  $N_n \supset N_{n+1}$  デアル」

定理 11. 「 $n > 0$  ナル時  $E = M_n + N_n$  ナラバ

$M_n = M_{n+1}$ ,  $N_n = N_{n+1}$  デアル」

定理 7, 8, 10, 11 ヲ纏メレバ

定理 12. 「 $n > 0$  ナルトキ次ノ四條件ハ同義デアル。

$M_n = M_{n+1}$ ,  $N_n = N_{n+1}$ ,  $M_n \cap N_n = (0)$ ,  $M_n + N_n = E$ 」

$n = 0$  ナラバ此ノ定理ノ後ノ二條件ハ常ニ満足サレテホ  
ルカラ 問題ニナラナイ。

定理 13 (7) 「 $M_0 = M$ ,  $N_0 = N$ , トハ同義デアル」

コレハ定理5,6ノ言ヒ換ヘ=過ヤタイガ定理12ト比較  
ノ便宜上導ゲタノデアル。

$$M_{\mu} \cap N_{\mu} = (0), \quad M_{\mu} + N_{\mu} = E$$

デアルカラ

定理14〔8〕 「 $E$ ノ点ハ  $M_{\mu}$ ノ点ト  $N_{\mu}$ ノ点ノ和トシ  
テ唯一通り=表ハサレル」

一般=  $\Phi(L) = L$ ヲ満足スル集合  $L$ ヲ取ル。  $N_n \supseteq L$   
サラバ  $N_{n+1} = \Phi(N_n) \supseteq \Phi(L) = L$ ヲ得ル、  $N_0 = E \supseteq L$   
デアルカラ結局  $N_{\mu} \supseteq L$ ヲ得ル。

定理15. 「 $N_{\mu}$ ハ  $\Phi(L) = L$ ヲ満足スル集合ノ最  
大ノモノデアル」