



Title	抽象空間ノ測度ニ就テ
Author(s)	寺阪, 英孝
Citation	全国紙上数学談話会. 1936, 79, p. 1-5
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74275
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

352. 抽象空間ノ測度ニ就テ

寺 阪 英 孝 (阪大)

Topologischer Raum $R = \text{Inhalt } m(O)$ が
與ヘラレタ offene Menge, System $\mathcal{O} = \{O\}$ が
アリ、次ノ諸性質ヲ持ツモノトスル。($O \in \mathcal{O}$ 集合ト
イフ)

I. 任意ノ点 $x \in R$, 近傍 $V(x)$, 正數 $\varepsilon = \text{對シ}$

$$x \in O \subset V(x), \quad 0 < m(O) < \varepsilon$$

ナル如キ O が存在スル。

$$\text{II. } O \subset O_1 + O_2 + \dots + O_n$$

ナラバ

$$m(O) \leq m(O_1) + \dots + m(O_n)$$

$$\text{III. } O \supset O_1 + \dots + O_n, \quad O_i, O_j = \emptyset \ (i \neq j)$$

ナラバ

$$m(O) \geq m(O_1) + \dots + m(O_n)$$

I, II, III, 外, O ノ周ノ條件トシテ

IV. O ノ周 $B(O)$ ハ, 任意ノ正數 $\varepsilon = \text{對シ}$

$$\sum_{i=1}^n m(O_i) < \varepsilon$$

ナル如キ $O_1, \dots, O_n$ デ被ハレル。

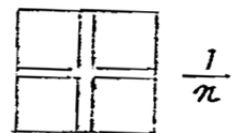
換言スレバ $B(O)$ ノ m ハ $0 = \text{等シイ}$ 、ト云フベキ條件
ヲ入レル。

コノ $\{0\}$ ヲ用ヒテ一般ニ $\mathbb{R}$, *offene Menge*
ノ *Maß* ヲ定義スルタメニ、次ノマウナ方法ヲ用ヒヌトシヨ
ウ。即チ

定義. 與ヘラレタ開集合 G 内ニ互ニ共有点ノナイ Ω
集合 $O_1, O_2, \dots$ ヲ有限個或ハ可附番個トリ、

$\max_n m(O_n) \rightarrow 0$ ノ時、 $\overline{\lim} \sum m(O_n)$ ヲ以テ G ,
Maß トスル。

コウスルト I — IV ガケノ條件デハ不都合デアルコトガ
直ガ分ル。例ヘバ辺長 $\frac{1}{n}$ ノ正方形ノ四隅カラ合同ノ正方形
ヲ切取ツタ残リノ十字形デ面積ガ $\frac{1}{4n^2} = \text{等シ}$
イモノヲ一般ニ $O(n)$ デ表ハセバ辺長 N (N
ハ正ノ整数) ノ正方形内ニ入り得ル $O(n)$ ノ数ハ極大雑バニ
見積ツテモ $(2nN)^2$ ヨリ小サイ故、ソノ *Inhalt* ノ総和
ハ $< \frac{N^2}{n^2}$, 故ニ $n > N$ ナル $O(n)$ ニツイテハ上述ノ



$$\sum m(O_n) < \sum_{n=N}^{\infty} \frac{N^2}{n^2}$$

ヨツテ、コノ正方形ノ *Maß* ハコノ $\overline{\lim}$ ガカラ 0 ニナル。
従ツテ平面ノドノ *offene Menge* , *Maß* モコノ計方
デハ 0 トナル。

Maß ノ定義ハ上述通リトシ、 $\{0\}$ = ドンナ條件ヲ
加ヘレバ不都合ガ起ラナイダラウカ。コレニ對スル答トシテ
不十分ナガレ次ノ一ツヲ與ヘルコトガ出來ル。

V. 任意ノ Ω 集合 $O = \text{對シ}$ 、 $O, O' \neq \emptyset$ デ且ツ

$$m(O') \leq 2m(O)$$

ナル凡テ、 O' 、 $\text{Summe } \Sigma O'$ ヲ含ミ $m(O^*) \leq k \cdot m(O)$

(k 一定数)ナル如キ $\mathcal{O}$ 集合 O^* が存在スル (十分小サナ

m ノ値ニツイテダケデモヨロシイ)

I — $\forall$ ヲ用ヒ次ノ定理ヲ証明スル。

定理 1. O ヲ $\mathcal{O}$ 集合トシ、

$O =$ 含マレル $\mathcal{O}$ 集合ノ

Inhalt ノ上限ヲ m_1 トシ、

$$m(O_1) > \frac{m_1}{2} \text{ ナル } O_1 \subset O \text{ ヲ}$$

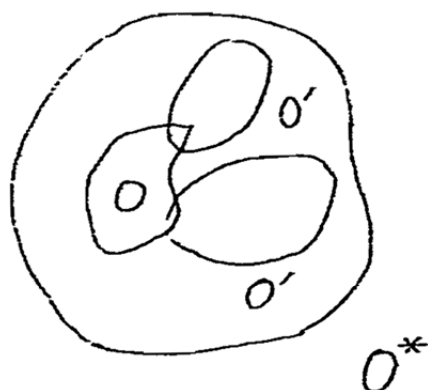
トル。 次ニ $O - O_1 =$ 含マ

レル $\mathcal{O}$ 集合ノ Inhalt ノ上限ヲ m_2 トシ、

$$m(O_2) > \frac{m_2}{2} \text{ ナル } O_2 \subset O - O_1 \text{ ヲトル。以下同様ニシ}$$

テ $O_3, \dots$ ヲ走ルトキ

$$m(O) = \sum_{i=1}^{\infty} m(O_i)$$



(証明) $n \geq N$ (N ハ任意ノ自然数)ニ對シ O_n^* ヲ作

リ、又別ニ $O_1, \dots, O_{N-1}$ ノ周ヲ $IV =$ 從ツテ Inhalt

ノ総和ガ $< \varepsilon$ ナル $\mathcal{O}$ 集合 $O'_1, \dots, O'_\lambda$ ヲ取テ、サウス

ルト

$$(*) \quad O \subset (O_1 + \dots + O_{N-1}) + (O'_1 + \dots + O'_\lambda) + \sum_{n \geq N} O_n^*$$

トナル。 何者 $x \subset O$ ガ $(O_1 + \dots + O_{N-1})$ 及ビ $(O'_1 + \dots$

$+ O'_\lambda) =$ 含マレルナラバ、 x ヲ含ミ $O - (O_1 + \dots + O_{N-1})$

= 含まれる Ω 集合, $Inhalt$ の上限 m トシ, コノ集合ノ中デ $Inhalt > \frac{m}{2} + \epsilon$ ツノ O_x ヲ考ヘル. 今 $O_N, O_{N+1}, \dots$ ノ中デ最初 $= O_x$ ト共有点ヲモツモノヲ O_λ ($\lambda \geq N$) トスレバ $O_\lambda^* \supset O_x \supset \mathcal{E}$ ナルコトガ云ヘル. 何者 $O_\lambda^* \supset O_x$ ガトスレバ O_λ^* ノ性質 $\forall \epsilon > 0$ ヨリ $m(O_x) > 2m(O_\lambda)$ 従ッテ (O_λ ハ $m(O_\lambda) > \frac{m_\lambda}{2} + \epsilon$ 故)

$$m(O_\lambda) > m_\lambda.$$

$$\text{然ルニ } m_\lambda \text{ ハ } O - (O_1 + \dots + O_{\lambda-1})$$

= 含まれる Ω 集合, $Inhalt$ の上限デアツタ筈故
 $m(O_x) \leq m_\lambda$, 矛盾. 従ッテ $O^* \supset O_x \supset \mathcal{E}$. ヨツテ (*) が成立スル. コレヨリ

$$\sum_{i=1}^{\infty} m(O_i) \leq m(O) < \sum_{i=1}^{N-1} m(O_i) + \epsilon + h \sum_{i=N}^{\infty} m(O_i)$$

$N \rightarrow \infty$ トスレバ

$$\sum_{i=1}^{\infty} m(O_i) = m(O). \text{ ————— }$$

定理2. $O_i \cdot O_j = 0$ ($i \neq j$) ナルトキ

$$\sum_{i=1}^n O_i \subset \sum_{i=1}^m O'_i \quad \text{ナラバ} \quad \sum_{i=1}^n m(O_i) \leq \sum_{i=1}^m m(O'_i)$$

(コレハIIノ性質ノ擴張デアル)

(証明) ツツ, $i = 1, \dots, n$ 對シ O_i ガ O'_k ($k=1, \dots, m$) ノドレニモ含まレテキナイ場合デモ任意ノ $\mathcal{E} \subset O_i$ ハ O'_k ノドレニモ含まレテキナイカラ、ソノーツヲ O'_k トシ, $\mathcal{E}$ ヲ含ム Ω 集

合ノ中デ $\subset O_i \cdot O'_k$ ノモノ全部ヲ $\mathcal{C} =$ 對應セシメル、コレヲ各 $\mathcal{C} \subset O_i =$ ツイテ行ハバ O ヲ蔽フ $\mathcal{O}'$ 集合が得ラレル、コノ $\mathcal{O}'$ 集合ダケデ定理1ノ方法ヲ用キレバ、 $O_i =$ 含まレ互ニ共有点ノナイ有限個ノ $\mathcal{O}'$ 集合デ、*Inhalt* ノ和が $m(O_i) =$ 極ク近イモノが得ラレル。($\mathcal{O}'$ ハ $\forall$ ヲ満足シナイオモ知レナイガソレデモ構ハナイ)

各 $O_i =$ ツキ之レヲ行ツテ得ラレタ $\mathcal{O}$ 集合ヲ $O'_1, \dots, O'_p$ トスレバ $\{O''\}$ ハ O'_k ノイヅレカニ含まレ $\sum m(O'') \wedge \sum m(O_i) =$ ゴク近イ $O'_1, \dots, O'_p$ 中 $O'_1 =$ 含まレルモノヲマトメ、次ニ残リノ中デ $O'_2 =$ 含まレルモノヲマトメ、以下同様ニシテ O'' ヲ分類スレバ、IIニヨリ

$$\sum_{i=1}^p m(O'_i) \leq \sum_{i=1}^m m(O'_i)$$

云々。 _____

開集合 $G =$ ツキ定理1ノ方法ニヨツテ $O_1, O_2, \dots$ ヲ定メレバ、 $\sum_{i=1}^{\infty} m(O_i)$ が有限ナル場合ハコノ値ヲ $m(G)$ トスルト、 $m(G)$ ハ *maß* ノ定義(上述)ニヨル値ト一致シ、 G が $\mathcal{O}$ 集合ナルトキハ上述ノ *Inhalt* = 等シク、又 $\mathcal{O}$ 集合同様 II, III ノ性質ヲ有スルコトが余ル。