



Title	函数方程式二就テ, VII
Author(s)	福原, 満洲雄
Citation	全国紙上数学談話会. 1936, 80, p. 7-11
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74282
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

359. 函数方程式=就イテ, VII

福原満洲雄此大

§ 3. 前回ノ記号ヲソノマデ使フコト=スル、即チ

$$(1) \quad \Phi(X) \equiv X - F(X) = 0$$

ノ解 X ノ集合ヲ M ,

$$(2) \quad \Phi(X) \equiv X - F(X) = x$$

ガ解ヲ持ツ x ノ集合ヲ N , エツト一般ニ

$$(3) \quad \Phi^n(X) \equiv X - F_n(X) = 0$$

$$(4) \quad \Phi^n(X) \equiv X - F_n(X) = x$$

= 関シテ同ジヤウニ M_n, N_n ヲ定義スル、空間 E ノ点 Z ハ

M_μ ノ点 X ト N_μ ノ点 Y ノ和トシテ表ハサレル: $Z = X + Y$ (定理14)、ソコヲ

$$\bar{F}(Z) = F(Y), \quad \bar{\Phi}(Z) = Z - \bar{F}(Z)$$

$$\bar{\bar{F}}(Z) = F(X), \quad \bar{\bar{\Phi}}(Z) = Z - \bar{\bar{F}}(Z)$$

= 依テ $\bar{F}(Z)$, $\bar{\bar{F}}(Z)$ ヲ 定義スルバ証明スル迄モナク

定理16(10) 「 $\bar{F}(Z)$, $\bar{\bar{F}}(Z)$ ハ完全連続ナ一次函数デ
 $F(Z) = \bar{F}(Z) + \bar{\bar{F}}(Z)$, $\bar{F}(\bar{\bar{F}}(Z)) = \bar{\bar{F}}(\bar{F}(Z)) = 0$; M_μ ノ点 X
 デハ $\bar{F}(X) = 0$, $\bar{\bar{F}}(X) = F(X)$; N_μ ノ点 Y デハ $\bar{F}(Y) = F(Y)$,
 $\bar{\bar{F}}(Y) = 0$ デアル。」

計算ヲ見ヤスクスルタメ $F, \Phi, \bar{F}$ 等ヲ空間 E ノ点ニ施ス
 一次変換ヲ表ハス記号ト考ヘ, E デ $E(X) = X$ ナル変換ヲ表
 ハス (E が空間ヲ表ハス文字ト同ジデマヅイガ混同ノ恐れハ
 ナカラウト思フ), 一般ニ A, B ガニツノ一次変換ナルトキ
 $A+B$ デ $A(X) + B(X)$ ナル変換ヲ, AB デ $A(B(X))$ ナル変
 換ヲ表ハス。

$$\bar{\Phi}\bar{\Phi} = (E - \bar{F})(E - \bar{\bar{F}}) = E - \bar{F} - \bar{\bar{F}} + \bar{F}\bar{\bar{F}} = E - F = \Phi$$

同ジマウ = $\bar{\bar{\Phi}}\bar{\Phi} = \Phi$ ヲ得ル。

定理17(11) 「 $\bar{\Phi}^n(X) = X$ ハ常ニ解ヲ持ツ、 $\bar{\bar{\Phi}}^n(X) = 0$ ノ
 解ト $\bar{\Phi}^n(X) = 0$ ノ解トハ一致スル、 $\bar{\bar{\Phi}}^n(X) = X$ ト $\bar{\Phi}^n(X)$
 = X トハ同時ニ解ヲ持ツカ又ハ同時ニ解ヲ持タナイ」

N_μ デ $\bar{\Phi} = \Phi$ デアルカテ $\bar{\Phi}(N_\mu) = \Phi(N_\mu) = N_\mu$. 又
 M_μ デハ $\bar{\Phi}(X) = X$ 従ツテ $\bar{\Phi}(M_\mu) = M_\mu$. 故ニ

$$\bar{\Phi}(E) = \bar{\Phi}(M_\mu) + \bar{\Phi}(N_\mu) = M_\mu + N_\mu = E.$$

従ツテ $\bar{\Phi}^n(E) = E$ 、コレハ $\bar{\Phi}^n(X) = X$ が常ニ解ヲ持ツコ

トヲ示ス。残ツタ部分ノ証明ニ大シタ困難ハナイト思フカラ省略スル。

§ 4. 前回 (VI) = 峯ゲタ定理ノ簡單ナ結果トシテ

$$(5) \quad \overline{\Phi}_\lambda(X) \equiv X - \lambda F(X) = 0$$

ノ固有値、即チソレガ0デナイ解ヲ持ツマシナ入ノ値ガ孤立シテキルコト [12] ガ得ラレル。入ヲ含ム方程式ニ関スル定理ハ後デ纏メテ述ベル予定デアルカラ定理トシテハ後デ擧ゲルガ、コゝテ証明ヲ述べテ置ク方が分リが早イト思フ。

簡單ノタメ $\lambda = 1$ ノ固有値トスル、 $\lambda \neq 1$ ノトキ (5) ノ満足スル解 X ヲ取り (2) = 依テ之ヲ定義スル。 (2), (5) カラ

$$X = (\lambda - 1)^{-1} \lambda x$$

ヲ得ル。 $x \in N$ デアルカラ $X \in N$ トナル。一般ニ $X \in N_n$ ナラバ $x \in N_{n+1}$ デアルカラ $X \in N_{n+1}$ トナル。故ニ $\lambda \neq 1$ ノトキ (5) ノ満足スル X ハ N_μ ノ点デナケレバナラナイ。所ガ $\overline{\Phi}(N_\mu) = N_\mu$ 。従ツテ $F(N_\mu) \subseteq N_\mu$ デアルカラ (5) ノ空間 N_μ = 於ケル方程式ト考ヘルコトガ出來ル。ソノトキ $\lambda = 1$ ハ固有値デナイ、固有値ノ集合ガ閉デテキルコトハ直グニ分ルカラ正ノ數 δ ヲ十分ニ小サク取レバ $|\lambda - 1| < \delta$ ナルトキ (5) ノ満足スル N_μ ノ点ハ 0 = 限ル。

[13] ハ $\overline{\Phi}_\lambda \equiv X - \lambda \overline{F}(X) = 0$ ノ固有値 = 関スルモノデア
ル。 [10], [11], [12], [13] カラ (5) ノ解ヲ $X = x - \lambda G(x, \lambda)$
ト書イタトキ $G(x, \lambda)$ ガ λ ノ有理型函数トナルコトガ証明
サレルコトハ Schauder が über lineare, vollstetige

Funktionaloperationen (Studia Math., II, 1930)

ノ脚註(18)が述べテ居ル。コレ等ノ定理ノ別証明モ後が述べル積リデアル。

尚序デアルカラ $F(X)$ が完全連続デナクテモ $F^n(X)$ が完全連続トナルマウナ正ノ整数 n が取レルナラバ同様ノ結論ヲ得ルコトヲ注意シテ置ク。

§5. Riesz ノ定理デ未ダ残ツテキルノハ [4] がケデアルガ、ソレヨリ次ニ述ベル定理ノ方が詳シイ。

$x_0 \in N$ トスレバ $\Phi(X) = x_0$ ハ解ヲ持ツ。ソノ一ツテ x_0 トスレバ $\Phi(X - X_0) = 0$ デアルカラ $X - X_0 \in M$ 即チ $X \in M(X_0)$ デアル。

逆ニ $M(X_0) =$ 属スル X ハ $\Phi(X) = x_0$ ヲ満足スル、故ニ N ノ点 $x =$ 商空間 E/M ノ点 $M(X) = X^*$ が一対一ニ對應スル、ソレヲ

$$\overline{\Phi}^*(x) \equiv x^* - G^*(x) = X^*$$

ト書ク (簡單ノタメ $M(x)$ ノ代リニ x^* ト書イタ)

定理 18. 「 $G^*(x)$ ハ N デ定義サレタ完全連続ナ一次函数デアル」

此ノ証明ノ峠ハ $N =$ 含マレル有界ノ集合ノ $G^*(x) =$ ヨル像が緊ツテキルトイフ所ニアルト思フカラ、ソノ部分ダケヲ述ベヨウ、 $N =$ 属スル有界ノ点列 $\{x_j\}$ ヲ取ツタトキ先ヅ $\{G^*(x_j)\}$ が有界トナルコトヲ証明スル。 $\{G^*(x_j)\}$ ノ代リニ

$$X_j^* = x_j^* - G^*(x_j)$$

が有界デアルコトヲ証明シテモ同ジデアル。若シソレが有界
 デナケレバ適當ナ部分列ヲ取ルコトニ依リ $\rho_j = \|X_j^*\| \rightarrow \infty$
 ト假定シテヨイ。M が有限ナ次元ヲ持ツカラ $\|X_j\| = \rho_j$ トシ
 テヨイ。 $X_j = \rho_j Y_j$ ト置ケバ $\Phi(X_j) = x_j$ デアルカラ
 $\Phi(Y_j) = Y_j - F(Y_j) = \rho_j^{-1} x_j$, $\|Y_j\| = \|Y_j^*\| = 1$
 ヲ得ル。故ニ適當ナ部分列ヲ取ルコトニヨリ $F(Y_j) \rightarrow Y$ ト假
 定スルコトが出来ル。 $\rho_j^{-1} x_j \rightarrow 0$ デアルカラ $Y_j \rightarrow Y$ 、從
 ヲテ $\Phi(Y) = Y - F(Y) = 0$ トナリ

$$Y \in M, \quad Z_j = X_j - \rho_j Y \in M(X_j)$$

ヲ得ル。 $Y_j = \rho_j^{-1} X_j \rightarrow Y$ デアルカラ j が十分ニ大キイ時
 $\|Y_j - Y\| < \frac{1}{2}$ 從ツテ $\|Z_j\| < \frac{1}{2} \rho_j$ トナリ矛盾デアル、故
 ニ X_j ハ有界デナケレバナラナイ、從ツテ $\{F(X_j)\}$ カラ收
 斂ナ部分列ヲ取出スコトが出来ル、ソレヲ $F(X_{j_k}) \rightarrow Y$ トス
 レバ、 $F(X_j) = X_j - x_j$ デアルカラ $X_{j_k} - x_{j_k} \rightarrow Y$ 、從ツテ
 $X_{j_k}^* - x_{j_k}^* \rightarrow Y^*$ トナル、 $G^*(x_j) = x_j^* - X_j^*$ デアルカラ
 $G^*(x_{j_k}) \rightarrow -Y^*$ トナル、故ニ $\{G^*(x_j)\}$ が緊ツテキルコ
 トが証明サレタ。