



Title	函数方程式ニツイテ, VIII
Author(s)	福原, 満洲雄
Citation	全国紙上数学談話会. 1936, 81, p. 6-12
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74285
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

362. 函数方程式 = 就イテ, VIII

福原満洲雄(北大)

§ 6. 今迄ノ記号ハソノマ、使フコト = スル、 A が一次閉集合デアルトキ $A(X)$ ヲ簡單 = X^A ナ、商空間 F/A ヲ F^A デ表ハス。

$\Phi(A) \supseteq A$ ナラバ $F(A) \supseteq A$, 逆 = $F(A) \supseteq A$ ナラバ

$\Phi(A) \supseteq A$ トナルコトハ明カデアアル、次 = $\Phi(A) \supseteq A$ ノ場合ヲ考ヘル、 X_1, X_2 が共 = $A(X)$ ノ点ナラバ $F(X_1) - F(X_2) \in A$ トナルカラ

$$F^A(X^A) = F(X)^A$$

= 依ツテ F^A デ定義サレタ一次函数 $F^A(X^A)$ ヲ得ル、 $F(X)$ が完全連続ナラバ $F^A(X^A) \in$ 完全連続デアアル、方程式

$$(1) \quad \Phi(X) \equiv X - F(X) = 0$$

$$(2) \quad \Phi(X) \equiv X - F(X) = c$$

カラ M, N ヲ定義シタヤウ =

$$(3) \quad \Phi^A(X^A) \equiv X^A - F^A(X^A) = 0^A$$

$$(4) \quad \Phi^A(X^A) \equiv X^A - F^A(X^A) = c^A$$

モラ M^A, N^A ヲ, エツト一般 = M_n, N_n ト同ジヤウ = M_n^A, N_n^A ヲ定義スル, ソノトキ

定理 19. 「 $\Phi(A) \supseteq A$ ナラバ $M_n^A \supseteq (M_n + A)/A$,
 $N_n^A \supseteq (N_n + A)/A$, $\Phi(A) = A$ ナラバ $M_n^A = (M_n + A)/A$,
 $N_n^A = N_n/A$ 」

コレハ後デ使ハナイカラ証明ハ省ク。

§7. 扱テ補助変数入ヲ含ム方程式

$$(5) \quad \Phi_{\lambda}(X) \equiv X - F(X, \lambda) = 0$$

$$(6) \quad \Phi_{\lambda}(X) \equiv X - F(X, \lambda) = X$$

ヲ考ヘヨク。 $F(x, \lambda)$ ハ x = 関シテ、ハ完全連続ナ一次函数、
 λ = 関シテハ λ_0 デ一様ニ連続 (即チ勝手ナ正ノ数 ε = 對シ
テ正ノ数 δ ヲ適當ニ取ツテ $\|x\| \leq 1, \|\lambda - \lambda_0\| \leq \delta$ ナル時

$$\|F(x, \lambda) - F(x, \lambda_0)\| < \varepsilon$$

トスルコトが出来ル) トスル。 λ ハ一般ニ或線状 D 空間ノ点
デアアル。

記号ハ複雑ニナルヲ避ケルタメ

$$F(x, \lambda_0) = F(x)$$

トスル。 $\lambda = (\text{一定})$ トシタトキ (5) ヲ満足スル X ノ集合ヲ
 $M(\lambda)$, (6) が解ヲ持ツモノナ X ノ集合ヲ $N(\lambda)$, 同ジモノニ
 $M_n(\lambda), N_n(\lambda)$ ヲ定義スル。

$\lambda_j \rightarrow \lambda_0, \{x_j\}$ が有界ナラバ $\{F(x_j, \lambda_j)\}$ が緊ツテキル
コトニ注意スレバ次ノ定理ヲ得ル。

定理 20. 「 λ が $\lambda_0 = \text{十分近イトキ } M_n(\lambda) \subseteq M_n \text{ トナル}$ 」

M が 0 がケヲ含ムナラバ $M_n(\lambda) \subseteq M_n$ カラ $M(\lambda) \in 0$ が
ケヲ含ムコトニナリ、從ツテ $N(\lambda) = E$ トナル。

定理 21. 「(1) ヲ満足スル X が 0 = 限ルナラバ λ が $\lambda_0 =$
 $\text{十分近イトキ (6) ハ勝手ナ } X = \text{對シテ常ニ唯一ツノ解ヲ持}$

ツ。」

(6)ノ解ヲ

$$\bar{\Psi}(x, \lambda) \equiv x - G(x, \lambda) = X$$

ト書クコト = スル。

定理 22. 「(i)ヲ満足スル X が $0 = \lim$ ナラバ $G(x, \lambda)$ ハ $x = 0$ 関シテ完全連続ナ一次函数, $\lambda = 0$ 関シテ λ_0 様ニ連続ナ函数デアル」

$x = 0$ 関スル性質ハ定理 18ノ結果デアル、 $\lambda = 0$ 関スル性質ハ帰謬法ヲ証明サレル。

$F(x, \lambda)$ が λ_0 デ微分出来ルトハ $F(x, \lambda)$ が

$$F(x, \lambda) = F(x, \lambda_0) + F'(x, \lambda - \lambda_0) + \Delta(x, \lambda - \lambda_0)$$

ナ形ニ書ケルコトヲ意味スル、但シ $F'(x, \lambda)$ ハ $\|x\| \leq 1$, $\|\lambda\| \leq 1$ デ完全連続ナ、 $\lambda = 0$ 関シテ一次ノ函数デ、 $\Delta(x, \lambda)$ ハ $\|x\| \leq 1$ デ一様ニ

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\|\lambda\|} \Delta(x, \lambda) = 0$$

ガ成立スル函数デアル。

定理 23. 「 $F(x, \lambda)$ が λ_0 デ微分出来, (i)ヲ満足スル X が $0 = \lim$ ナラバ, $G(x, \lambda) \in \lambda_0$ デ微分出来」

コレハ定理 5(II)ノ特別ノ場合ニ過ギナイ。コノ場合ニハ(6)ノ解ガ唯一ツデアルコトガ分ツテキルカラ証明ハ更ニ楽ニナル。

§ 8. 特ニ λ が

$$(7) \quad \Phi_{\lambda}(x) \equiv x - \lambda F(x) = 0$$

$$(8) \quad \Phi_{\lambda}(x) \equiv x - \lambda F(x) = x$$

ナル形ヲ持ツ場合ヲ考ヘヨ。入ハ実数又ハ複素数或ハ多元数体ニ属スル数(可換デアアル必要ナシ)トシテモヨイガ、徒ラニ理論ヲ複雑ニスル嫌ヒガアルカラ後ノ便宜上入ハ複素数トキメテオク。入トEノ点xノ積ニ関シテハ入ガ複素数ノ時ニモ入xガ一通リニ定義サレ

$$\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x, \quad \lambda x + \mu x = (\lambda + \mu)x,$$

$$\lambda x + \lambda y = \lambda(x + y)$$

等ヲ假定スルガ、 $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ ハ入ガ実数ノトキダケ假定シ、一般ニ入ガ複素数ノ場合ニハ

$$\|\lambda x\| \leq K |\lambda| \cdot \|x\|$$

トナルヲシテ入, xニ関係シナイKが存在スルモノト假定スルダケデヨイ、又F(x)ガ一次函数デアアルトイフトキニハ入ガ複素数ノ場合ニモ入F(x) = F(λx)トナルコトヲ假定スル、若シ実数トEノ点ノ積ガ定義サレテキルダケナラバ虚単位iヲ導入シテ

$$F(x + iy) = F(x) + iF(y)$$

ニ依テF(x)ヲ空間E + iEニ於テ定義シ、(7), (8)ヲE + iEニ於ケル方程式ト考ヘレバヨイ。

定理24. 「有限ナ固有値ハ孤立シテキル」

コレハ己ニ証明ズミデアアル(VII, §4). (8)ノ解ヲ

$$\Psi_{\lambda}(x) \equiv x - \lambda G_{\lambda}(x) = x$$

ト書テ、定理 23 = 依リ $G_\lambda(x)$ ハ固有値以外ノ点ニハ入、
正則函数デアル、從ツテ固有値ノ近傍デ $G_\lambda(x)$ ハ *Laurent*
級数ニ展開サレル、簡單ノヌ $\lambda=1$ 7 固有値トシ、*Laurent*
級数ヲ

$$G_\lambda(x) = \sum_{p=0}^{\infty} (\lambda-1)^p A_p(x) + \sum_{p=1}^{\infty} (\lambda-1)^{-p} B_p(x)$$

トスル、 $A_p(x)$, $B_p(x)$ が完全連続ナ一次函数デアルコト
ハ、ソノ積余表示カラカル。

$$(E - \lambda F)(E - \lambda G_\lambda) = (E - \lambda G_\lambda)(E - \lambda F) = E$$

カラ

$$(9) \quad F + G_\lambda = \lambda F G_\lambda = \lambda G_\lambda F$$

ヲ得ル、 $F G_\lambda = G_\lambda F$ カラ

$$A_p F = F A_p, \quad B_p F = F B_p$$

從ツテ $A_p \Phi = \Phi A_p, \quad B_p \Phi = \Phi B_p$

ヲ得ル、又 (9) = G_λ ノ展開式ヲ入レ $(\lambda-1)^{-p}$ ノ係数ヲ比較
スルコト = ヨリ

$$\Phi B_p = F B_{p+1} \quad (p=1, 2, \dots)$$

從ツテ

$$(10) \quad \Phi^{p+q} B_\lambda = \Phi^p F^q B_{q+\lambda} \quad (\lambda=1, 2, \dots; p, q=0, 1, 2, \dots)$$

ヲ得ル。

$\Phi(N_\mu) = N_\mu$ デアルカラ $F(N_\mu) \supseteq N_\mu$ 從ツテ (8) 7

N_μ = 於ケル方程式ト考ヘルコトが出来ル。(1) 7 満足スル

N_μ ノ点 X ハ $0 = \lim$ カラ N_μ = 於テ考ヘレバ $\lambda=1$ ハ固有

値デナイ、故 = $\Psi_\lambda(x)$ ハ N_μ デ考ヘレバ $\lambda=1$ デ正則トナ
レ、即チ

$$B_p(x)=0 \quad (x \in N_\mu, p=1, 2, \dots)$$

$\Phi^\mu(E) = N_\mu$ デアルカラ、コレハ

$$\Phi^\mu B_p = B_p \Phi^\mu = 0 \quad (p=1, 2, \dots)$$

ト書イテモ同じコトデアレ、コレト(10)トカラ

$$\Phi^{\mu-j} F^j B_t = 0 \quad (t=\mu+1, \dots; j=0, 1, \dots, \mu)$$

ヲ得ル、所ガ $\Phi + F = E$ デアルカラ

$$\Phi^\mu + \mu \Phi^{\mu-1} F + \dots + F^\mu = (\Phi + F)^\mu = E$$

トナレコト = 注意スレバ $p > \mu$ ノトキ $B_p = 0$ ヲ得ル。

G_λ ガ固有値 = 於テ正則トナリ得ナイコト、(8)ヲ $N_{\mu-1}$
ニ於ケル方程式ト考ヘテモ $\lambda=1$ ハ固有値デアルコト、及ビ

$$\Phi^{\mu-1} B_1 = \Phi^{\mu-2} F B_2 = \dots = F^{\mu-1} B_\mu$$

= 注意スレバ $E =$ 於テ $B_1, B_2, \dots, B_\mu$ ハ皆0デナイコト
カナル、依ツテ

定理 25. 「固有値 $\lambda=1$ ハ G_λ ノ μ 位ノ極デアル」

従ツテ G_λ ハ λ ノ有理型函数デアル。

(注意) 定理 16 [10], 17 [11] ハ便利ナ定理デアルガ
ソレヲ使フノヲ避ケタ、ソレヲ使フコトノ利益ハ問題ヲ有限
次元ノ空間ニ持来スコトが出来ル所=アル、併シソレデハ証
明ノ方針ガソコデ急激ナ変化ヲ受ケタコト=ナリ、ドウモ満
足出来ナカッタノデアル。

コノマデ来レバ南雲氏が注意サレタ如ク $B_1, \dots, B_\mu$ ノ

構造ヲ調バルコトモ容易トナルガ更ニソレヲト $M_1, \dots, M_\mu$
 及ビ定理 16, 17ニ現ハレル $\overline{F}, \overline{\overline{F}}$ 等トノ關係ヲ次回ニ於テ明カニ
 シタイト思フ。